I - Définition et convergence d'une série numérique

Définition *Soit (u_n) une suite de nombres réels. On définit la suite (S_n) par :*

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- *Si la suite (S_n) admet une limite lorsque $n \to +\infty$, on note*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et on dit que la série $\sum u_n$ converge.
Si (S_n) n'admet pas de limite, ou a une limite infinie, on dit que la série $\sum u_n$ diverge.

- *La suite de nombre réels*

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est appelée somme partielle de rang n de la série $\sum u_n$.

- *u_n est appelé terme général de la série $\sum u_n$.*

Remarque : Une série est donc une suite !

Exercice 1 • Soit $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, alors, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}$

Calculer :

$S_1 = \dots$ $\qquad$ $S_2 = \dots$

$S_5 = \dots$ $\qquad$ $S_{10} = \dots$

La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ semble-t-elle converger ?

Exercice 2 Les séries $\sum 2^n$ et $\sum \dfrac{1}{2^n}$ convergent-elles ?

Remarque : Pour qu'une série $\sum u_n$ converge, il faut que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Attention ce n'est pas une condition suffisante ! Il faut que (u_n) converge «assez vite» vers 0.

Exercice 3 Soit $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Décomposer u_n en éléments simples, puis, en détaillant la somme partielle $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 4 La série harmonique

$$\sum \frac{1}{n}$$

semble-t-elle converger ?

série car on ne sait qu'exceptionnellement trouver la somme d'une série convergente.
Nénamoins, une fois assuré qu'une série converge, on peut alors tenter de calculer numériquement (informatiquement) une valeur approchée de sa somme.

Exercice 5 Ecrire et calculer les sommes partielles de rang 1 à 5 des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$

II - Série géométrique

Définition *Une série géométrique est une série de la forme* $\sum q^n$ *avec* $q\in\mathbb{R}$.

Propriété *Une série géométrique est convergente et seulement si* $|q|<1$, *et on a alors*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Exercice 6 Déterminer si les suites suivantes convergent et calculer, le cas échéant, leur somme :

$$\sum\left(\frac{5}{6}\right)^n \qquad \sum 3^n \qquad \sum 1^n$$

III - Séries à termes positifs

Définition *Une série* $\sum u_n$ *est dite à termes positifs lorsque* $u_n\geq 0$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

Exemple : $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum\frac{1}{3^n}$, $\displaystyle\sum\left|\sin\frac{1}{n}\right|$

1) Séries de Riemann [1]

Définition *Une série de Riemann est une série de la forme* $\displaystyle\sum\frac{1}{n^\alpha}$ *avec* $\alpha\in\mathbb{R}$.

Propriété *Une série de Riemann* $\displaystyle\sum\frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha>1$.

(condition pour que le terme général $\displaystyle\frac{1}{n^\alpha}$ *tende vers 0 «assez vite »)*

Exercice 7 Indiquer si les séries suivantes convergent ou non.

$$\sum\frac{1}{n} \qquad \sum\left(\frac{1}{n}\right)^2 \qquad \sum n^3 \qquad \sum\frac{1}{\sqrt{n}}$$

1. Georg Friedrich Bernhard Riemann (17 septembre 1826 à Breselenz, État de Hanovre - 20 juillet 1866 à Selasca, Italie) est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle.

Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_k$.
Si la série est à termes positifs, c'est-à-dire $u_n \geqslant 0$ pour tout entier n, alors

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k = S_n + u_{n+1} \geqslant S_n$$

et donc la suite (S_n) est croissante.

Propriété *Si (S_n) est majorée alors $\sum u_n$ est une série convergente.*

3) Comparaison du terme général au terme général d'une série connue

Théorème **Critère de comparaison**

Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives avec à partir d'un certain rang $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice 8 En comparant à une série de Riemann, déterminer si les série suivantes sont convergentes.

$$\sum \frac{|\cos(n)^n|}{n^2} \qquad \sum \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad (\text{rappel, pour } x \geqslant 0, sin(x) \leq x) \qquad \sum \frac{\arctan n}{n^3}$$

4) Suites équivalentes

Définition *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles avec v_n non nul à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors*

$$u_n \underset{\infty}{\sim} v_n .$$

Théorème **Critère d'équivalence**

Si les (u_n) et (v_n) sont positives et équivalentes alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple : $\dfrac{1}{n(n+1)} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
Et donc, $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ sont de même nature, soit ... ...

Exercice 9 Déterminer si les séries suivantes sont convergentes :

$$\sum \frac{1}{n^2+1} \qquad \sum \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} \qquad \sum \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$$

5) Règle de D'Alembert [2]

2. Jean le Rond D'Alembert, né le 16 novembre 1717 à Paris où il est mort le 29 octobre 1783, est un mathématicien, philosophe et encyclopédiste français. Il est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec Denis Diderot jusqu'en 1757 et pour ses recherches en mathématiques sur les équations différentielles et les dérivées partielles.

u_n

- *Si $l<1$ alors la série $\sum u_n$ converge.*
- *Si $l>1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.*
- *Si $l=1$ la règle ne permet pas de conclure.*

Exercice 10 Les séries suivantes convergent-elles ?

$$\sum \frac{\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n} \qquad \sum \frac{x}{n!} \text{ avec } x \text{ réel positif} \qquad \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum \frac{n^2}{(2n)!} \qquad \sum \frac{2^n}{n!}$$

IV - Critère des séries alternées

Définition *Une série $\sum u_n$ est dite alternée lorsque, à partir d'un certain rang, u_{n+1} et u_n sont de signes contraires.*

Exemple

$$\sum(-1)^n \qquad \sum(-1)^n\frac{n^2}{1+n} \qquad \sum(-1)^{n+1}|sin(nx)| \text{ avec } x\in\mathbb{R} \qquad \sum \sin(n\pi+x) \text{ avec } x\in\mathbb{R}$$

Remarque : Il n'est pas toujours immédiat de voir qu'une série est alternée : $u_n = sin\left(\pi\times\frac{n^2+1}{n}\right)$.

Propriété *Soit $\sum u_n$ une série alternée.*
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que $(|u_n|)$ est décroissante alors $\sum u_n$ CV .
On a alors $|S-S_n|\leq|u_n|$ (on n'a pas la somme de la série mais on a une approximation).

Exercice 11 Les séries $\sum(-1)^n\frac{n^2}{1+n}$ et $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ sont-elles convergentes ?

V - Série absolument convergentes

Définition *Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si et seulement si $\sum|u_n|$ est une série convergente.*

Remarque essentielle : La série $\sum|u_n|$ est une série à termes positifs, et on peut donc utiliser les règles vues précédemment.

Théorème *Une série absolument convergente est convergente.*

Exercice 12

1. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2}$ est-elle absolument convergente ? convergente ?
2. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n}$ est-elle absolument convergente ? convergente ?