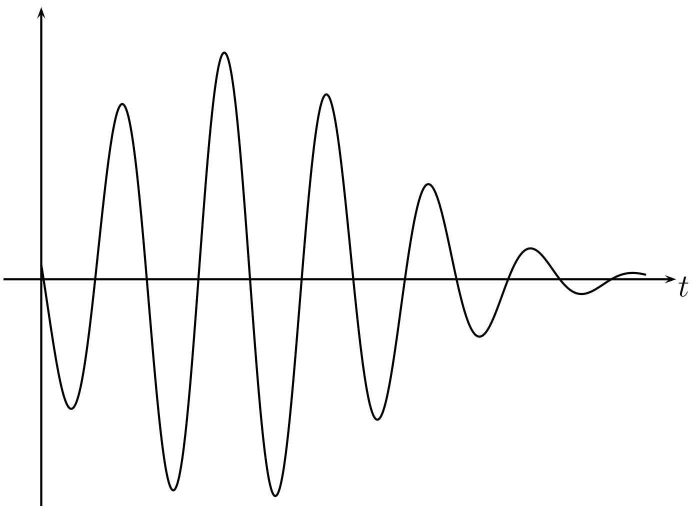
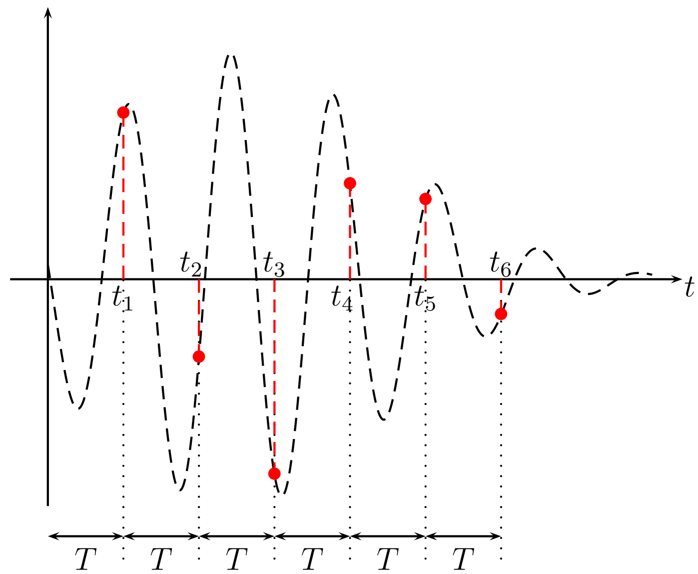
Soit s un signal causal analogique et s^* le signal échantillonné à la période T : $s^*(t) = \begin{cases} s(t) & \text{si } t = nT \\ 0 & \text{si } t \neq nT \end{cases}$.

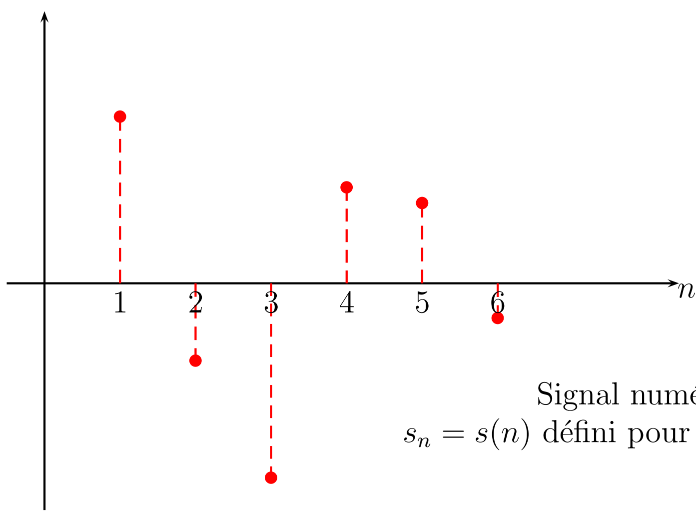
On note (s_n) la suite numérique définie par les échantillons du signal s^* : $s_n = s^*(nT) = s(nT)$.



Signal analogique s
$s(t)$ défini pour tout t réel, $t \geqslant 0$



Echantillonnage
du signal s aux instants $t_n = nT$



Signal numérique (s_n)
$s_n = s(n)$ défini pour tout n entier, $n \geqslant 0$

Le signal échantillonné s^* est une succession d'impulsion de Dirac aux instants nT :

$$s^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT)\, s(nT)$$

De cette façon, on a bien :

$$\begin{cases} \text{si } t = kT, \quad s^*(t) = s^*(kT) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(kT - nT)\, s(nT) = s(kT) \\ \text{si } t \neq kT, \quad s^*(t) = 0 \end{cases}$$

transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est : $\left[\mathcal{L}\delta\right](p) = 1$, tandis que $\delta(t-nT)$ est l'impulsion de Dirac retardée de nT, d'où,

$$\left[\mathcal{L}\delta(t-nT)\right](p) = e^{-nTp}\left[\mathcal{L}\delta\right](p) = e^{-nTp}\ .$$

On admet finalement que la linéarité de la transformée de Laplace s'applique à cette somme infinie.

On a alors

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{L}s^*\right](p) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathcal{L}\delta(t-nT)\right](p)s^*(nT)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTp}s(nT)\end{aligned}$$

soit, en posant $z = e^{Tp}$, et donc $z^{-n} = \left(e^{Tp}\right)^{-n} = e^{-nTp}$,

$$\left[\mathcal{L}f^*\right](p) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}s_n = S(z)$$

La transformée de Laplace d'un signal échantillonné est égal à sa transformée en z.

La transformée en z est donc l'outil théorique, analogue à la transformée de Laplace pour les signaux continus, qui permet l'étude des signaux discrets.