Approximation numérique de dérivées

IUT SGM

Y. Morel

https://xymaths.fr/

Une idée simple pour approximer la valeur de la dérivée d'une fonction en un point est de revenir à la définition :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

et d'utiliser non pas une limite "infinitésimale" mais une **différence finie** :

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \ , \quad \text{pour } h \text{ "petit"}$$

Bien sûr, cette approximation est d'autant meilleur que h est petit...

La formule d'approximation de $f'(a)$

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

est une formule décentrée et avancée, ou formule décentrée à droite.

On peut penser utiliser de même une formule décentrée, mais retardée, ou encore décentrée à gauche :

$$f'(a) \simeq \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

La formule plus générale, et fondamentale, pour l'étude d'une fonction et de ses dérivées est la formule de Taylor (-Young ici) :

pour une fonction n fois dérivable au voisinage de a,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f"(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + O\left(h^{n+1}\right)$$

On trouve en particulier au premier ordre

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + O(h)$$

ou, en remplaçant h par $-h$,

$$\frac{f(a) - f(a-h)}{h} = f'(a) + O(h)$$

La formule plus générale, et fondamentale, pour l'étude d'une fonction et de ses dérivées est la formule de Taylor (-Young ici) :

pour une fonction n fois dérivable au voisinage de a,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f"(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + O\left(h^{n+1}\right)$$

On trouve en particulier au premier ordre

$$\boxed{\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \simeq f'(a)} + O(h)$$

ou, en remplaçant h par $-h$,

$$\boxed{\frac{f(a) - f(a-h)}{h} \simeq f'(a)} + O(h)$$

Ces schémas d'approximations décentrés sont donc d'ordre 1 : en divisant par exemple h par 10, on divise aussi la précision par 10.

Exercice 1 : Soit $f(x) = x^3 + 1$.

1. Donner la valeur exacte de $f'(1)$.
2. On prend un pas $h = 0,5$.
   Calculer une valeur approchée de $f'(1)$ avec les deux schémas décentrés, à droite et à gauche.
3. Reprendre ces calculs avec un pas $h = 0,1$ puis $h = 0,05$ et $h = 0,01$.
4. Commenter les résultats.

On cherche un schéma plus précis.
Comme le terme d'ordre 2 est pair, on peut penser à combiner les deux schémas décentrés :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f"(a) + O\left(h^3\right)$$

et donc,

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2} f"(a) + O\left(h^3\right)$$

et alors, en soustrayant terme à terme :

$$f(a+h) - f(a-h) = 0 + 2hf'(a) + 0 + O\left(h^3\right)$$

$$\iff \quad f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + O\left(h^2\right)$$

On cherche un schéma plus précis.
Comme le terme d'ordre 2 est pair, on peut penser à combiner les deux schémas décentrés :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f"(a) + O\left(h^3\right)$$

et donc,

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2} f"(a) + O\left(h^3\right)$$

et alors, en soustrayant terme à terme :

$$f(a+h) - f(a-h) = 0 + 2hf'(a) + 0 + O\left(h^3\right)$$

$$\iff \quad \boxed{f'(a) \simeq \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}} + O\left(h^2\right)$$

On obtient un schéma centré **d'ordre 2**.

Exercice 2 : On reprend la fonction $f(x) = x^3 + 1$.

Calculer une valeur approchée de $f'(1)$ avec le schéma centré et un pas $h = 0,5$ puis $h = 0,1$, $h = 0,05$ et $h = 0,01$.

Commenter.

À nouveau, la formule de Taylor s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f"(a) + O\left(h^3\right)$$

et

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f"(a) + O\left(h^3\right)$$

et donc, en ajoutant les deux expressions pour annuler le terme en $f'(a)$,

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + 0 + h^2f"(a) + O\left(h^3\right)$$

et donc,

$$f"(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} + O(h)$$

À nouveau, la formule de Taylor s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f"(a) + O\left(h^3\right)$$

et

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f"(a) + O\left(h^3\right)$$

et donc, en ajoutant les deux expressions pour annuler le terme en $f'(a)$,

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + 0 + h^2 f"(a) + O\left(h^3\right)$$

et donc,

$$\boxed{f"(a) \simeq \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}} + O(h)$$

donne une approximation de la dérivée seconde, d'ordre 1.

Exercice 3 : On reprend la fonction $f(x) = x^3 + 1$.

1. Calculer la valeur exacte de $f"(1)$.
2. Calculer une valeur approchée de $f"(1)$ avec le schéma précédent et un pas $h = 0,5$ puis $h = 0,1$, $h = 0,05$ et $h = 0,01$.
3. Commenter.

Exercice 4 : Soit $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Calculer la valeur exacte de $f"(1)$.
2. Calculer une valeur approchée de $f"(1)$ avec le schéma précédent et un pas $h = 0,5$ puis $h = 0,1$, $h = 0,05$ et $h = 0,01$.
3. Commenter.