Travaux Pratiques 1/2

MODÉLISATION ET SIMULATION

Semestre 3

Année 2021-2022

Yoann Morel

TP 0 Scilab

Dans son utilisation la plus simple, Scilab est une "super-calculatrice". Au prompt "`-->`", on peut saisir des commandes, calculs, ...Scilab retourne alors ce qu'il en pense, après "`ans =`" (pour **ans**wer).

Par exemple, saisir successivement :

```
-->a=5+12.3
-->sqrt(12)
-->(1+%i)^3
```

ou encore,

```
-->A=3;
-->x=[-2*%pi:0.01:2*%pi];
-->y=A*cos(2*x);
-->plot(x,y);
```

Le "`;`" à la fin d'une ligne permet de ne pas afficher la réponse d'une instruction.

On peut aussi saisir les instructions précédentes dans un script. Saisir pour cela la commande "`edit`" (ou dans la barre de menus, "`Applications` → `SciNotes`").

Saisir, ou copier, les lignes précédentes et enregistrer le fichier sous le nom "`prog.sce`". Exécuter enfin ce script, soit à partir de l'icone ad-hoc de la fenêtre de l'éditeur, soit en tapant dans la fenêtre de commandes de Scilab la commande "`exec('prog.sce',-1)`".

Que calculent les programmes suivants ? Les saisir et les exécuter.

```
u=0;n=10;
for i=1:n
    u=2/3*u-1/6
    disp(i,u)
end
```

```
s=0;n=10;
for i=1:n
     s=s+i
end
disp(s)
```

Exercice 1 : Calculer les sommes $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ et $T = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ pour différentes valeurs de n $(10, 100, \dots, 10^6, \dots)$.

Dans les exemples précédents, on peut aussi créer un vecteur (ou matrice, ou encore tableau) contenant les valeurs de la suite :

```
u=0;n=10;
for i=1:n
     V(i)=u
     u=2/3*u-1/6
    disp(i,u)
end
plot(V)
```

ou

```
V(1)=0;n=10;
for i=1:n
     V(i+1)=2/3*V(i)-1/6
end
plot(V)
```

Exercice 2 : À partir de l'exercice 1 précédent, tracer sur un graphique

a) les valeurs de la somme S en fonction de n ;

b) les valeurs de la somme T en fonction de n, et superposer sur ce même graphique la courbe du logarithme népérien (`log`)

   Que remarque-t'on ? Tracer enfin sur un autre graphique l'évolution de l'écart, en fonction de n, entre $T(n)$ et $\log(n)$.

Exercice 3 : Soit la suite définie par $u_1 = 0.2$ puis, pour tout entier n, $u_{n+1} = r u_n (1 - u_n)$.
Écrire un programme qui calcule est représente graphiquement les 50 premiers termes de la suite (u_n) dans les trois cas : $r = 3$, $r = 3.5$ et $r = 4$.
Représenter graphiquement, sur une autre figure et dans les mêmes trois cas, les termes u_{950} à u_{1000}.

Les programmes précédents utilisent des boucles itératives : on effectue les instructions dans la boucle un nombre fixé de fois (n ici), défini à l'avance.

Les **boucles conditionnelles**, `while ...`, permettent d'effectuer des instructions "en boucle" sans nécessairement en connaître le nombre dès le début.

Par exemple, si on cherche le nombre de termes dans la somme T avant de dépasser 10, on peut procéder ainsi :

```
T=0;i=0;
while T<10
     i=i+1
     T=T+1/i
end
disp(i)
```

Exercice 4 : Une fine couche d'épaisseur 1cm d'un certain matériau absorbe 5% de l'intensité sonore, en dB, qui la traverse.

Combien de couches, et donc quelle épaisseur, de ce matériau faut-il pour qu'un son d'une intensité de 140 dB soit atténué en moins 40 dB ?

Tracer sur un graphique l'intensité sonore en fonction du nombre de couches traversées.

TP 1 Résolution numérique d'une équation

On s'intéresse dans ce TP aux trois méthodes numériques de résolution approchée d'équations : **la méthode de Dichotomie, la méthode de Newton et la méthode de la sécante**.

On cherche à résoudre l'équation $\sin x = 0$ sur l'intervalle $[3,4]$.

1) Programmer la méthode de recherche d'une solution par dichotomie.
   Le calcul sera effectué jusqu'à ce que la différence entre les bornes de l'intervalle dans lequel se trouve la solution atteigne 10^{-4}. La solution de l'équation sera alors approchée par le milieu de ce dernier intervalle.
   Combien d'itérations ont-elles été nécessaires ?

2) Programmer l'algorithme de Newton. On note (x_n) la suite ainsi calculée et convergente vers la solution. On prendre comme valeur initiale $x_0 = 4$ et la solution approchée de l'équation, x_n, sera celle obtenue lorsque $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$.
   Donner la valeur approchée de la solution et le nombre nécessaire d'itérations pour l'atteindre.

3) Même question que la précédente en s'appuyant sur la méthode de la sécante avec les valeurs initiales $x_0 = 3$ et $x_1 = 4$.

TP 2 Calcul d'une intégrale

On s'intéresse ici au calcul de l'intégale $I = \displaystyle\int_0^2 e^{2x}dx$.

Pour effectuer des calculs numériques approchés, on découpe l'intervalle $[0,2]$ en N intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ réguliers, c'est-à-dire que le pas $h = x_{i+1} - x_i$ est constant.

Calculer la valeur exacte de I, puis remplir le tableau suivant par des valeurs approchées à 10^{-4} calculées en utilisant les méthodes numériques indiquées.

	N	h	I	Erreur relative (%)
Rectangle à gauche	20			
Rectangle à gauche	200			
Rectangle à droite	20			
Rectangle à droite	200			
Trapèzes	20			
Trapèzes	200			
Simpson	20			
Simpson	200			

TP 3 Résolution d'équations différentielles

1) On s'intéresse à l'équation différentielle : $y' + y^2 = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

   a) Calculer la solution exacte de cette équation.

   Par la suite, les résultats des différentes méthodes et questions seront donnés à 10^{-5} près et rassemblés dans le tableau ci-dessous.

   b) Calculer, à l'aide de la méthode d'Euler, une valeur approchée de $y(1)$ et $y(3)$ pour un pas h égal à $0,1$ puis pour un pas égal à $0,01$.

   c) Même question que la précédente mais en utilisant la méthode Runge Kutta d'ordre 2 (Euler améliorée).

   d) Utiliser cette fois la méthode de Runge Kutta d'ordre 4.

   Cette méthode utilise des points intermédiaires supplémentaires :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\Big(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + 1k_3\Big) \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} k_0 = \varphi\left(x_i; y_i\right) \\ k_1 = \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_0\right) \\ k_2 = \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = \varphi\left(x_i + h; y_i + hk_2\right) \end{array}\right.$$

   e) Comparer et commenter ces résultats.

	h	$y(1)$	$y(3)$	Erreurs relatives (%)
Solution exacte				
Euler	$0,1$			
Euler	$0,01$			
Runge Kutta d'ordre 2	$0,1$			
Runge Kutta d'ordre 2	$0,01$			
Runge Kutta d'ordre 4	$0,1$			
Runge Kutta d'ordre 4	$0,01$			

2) On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle $y' + xy^2 = 0$ avec $y(0) = 1$.

   a) Résoudre analytiquement l'équation $y' + xy^2 = 0$ avec $y(0) = 1$.

   b) En adaptant la méthode de Runge Kutta utilisée précédemment, calculer une valeur approchée à 10^{-5} près de $y(1)$, pour un pas $h = 0,01$.

   Préciser l'erreur relative sur la solution obtenue au point $x = 1$.

TP 4 Équation différentielle du second ordre

On se propose de résoudre l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$(E) : \; y'' + y' - 2y = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$.

1) Retrouver la solution analytique (exacte) de cette équation.

2) On va mettre en place un schéma numérique pour approcher la solution de l'équation. Pour cela, on prendra un pas h et on notera classiquement $y_i = y(x_i)$ la solution en un point $x_i = ih$.

   a) Rappeler la formule approchée de la dérivée y'_i par un schéma décentré avancé.
   Déduire alors des conditions initiales que $y(h) = 3$.

   b) Rappeler une formule approchée de la dérivée seconde y''_i

   c) Á l'aide des deux formules précédentes et de l'équation (E), écrire un schéma numérique qui permet d'exprimer la solution y_{i+1} en fonction de y_i et y_{i-1}.
   Calculer alors, à l'aide d'un programme, les valeurs successives y_i.

3) Remplir le tableau suivant :

	h	$y(1)$	Erreur relative (%)
Solution exacte			
Modèle numérique	$0,1$		
Modèle numérique	$0,01$		
Modèle numérique	$0,001$		

TP 5 Méthode des moindres carrés

1) Ajustement affine : droite des moindres carrés

Pour un ensemble de points de coordonnées $(x_i; y_i)$ on rappelle que la droite des moindres carrés a pour équation $y = ax + b$ avec

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad \text{et} \quad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

en notant $\overline{x}$ la moyenne des valeurs x_i, $\overline{y}$ la moyenne des valeurs y_i, $\overline{xy}$ la moyenne des valeurs x_iy_i, et $\overline{x^2}$ la moyenne des valeurs x_i^2.

1) Dans une feuille de calcul d'un tableur, créer le tableau des coordonnées de 7 points :

$$(1, 3),\ (2, 4),\ (3, 9),\ (4, 8),\ (5, 12),\ (6, 11),\ (7, 18).$$

Calculer les coefficients a et b de la droite des moindres carrés dans deux cellules de la feuille de calcul.

2) Tracer sur cette feuille de calcul la droite des moindres carrés et l'ensemble des 7 points $(x_i; y_i)$.

3) Vérifier votre tracé et votre calcul précédent en traçant les points sur le tableur et en rajoutant une courbe de tendance ad'hoc.

Un autre type d'ajustement est-il plus adapté ?

2) Ajustement exponentiel : durée de vie et maintenance d'équipements.

On s'interesse à la durée de vie d'appareils mécaniques, entre autre en vu de la planification de la maitenance / remplacement des appareils. Les pourcentages $R(t_i)$ des appareils mécaniques encore en service après un nombre t_i d'heures de fonctionnement ont été relevés et notés dans le tableau suivant :

t_i	100	200	300	400	500	600	750	1000	1500
$R(t_i)$	0,80	0,64	0,52	0,40	0,32	0,28	0,20	0,12	0,04

1. Saisir les coordonnées des points correspondants, les tracer dans une feuille de calcul.
   Un ajustement affine semble-t'il pertinent ? Justifier précisément.
2. On pose $y_i = \ln R(t_i)$. Représenter graphiquement le nuage de points M_i de coordonnées $(t_i; y_i)$.
3. Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage de points ?
   Donner l'équation de la droite de régression de y en t.
   En déduire une expression de la forme $R(t) = ke^{-\lambda t}$, avec k et λ des constantes.
4. Déterminer à l'aide du modèle précédent, le nombre d'équipements encore en service au bout de 900 heures de fonctionnement.
5. À l'aide de ce modèle, déterminer à partir de quand le pourcentage d'appareils encore en fonctionnement sera inférieur à 1%.