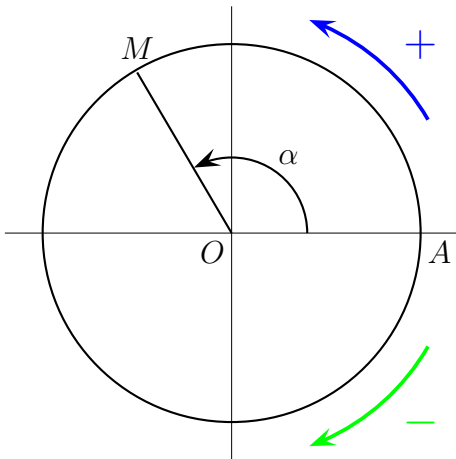


I - Mesure d'un angle en radian



• Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 orienté.

• Sur un cercle trigonométrique, la longueur de l'arc \widehat{AM} est la mesure en radian de l'angle α :

$$\widehat{AOM} = \widehat{AM} = \alpha \text{ radians}$$

α (deg)	0	45	60	90	135	180	270	360	-60	-120
α (rad)										

Sur un cercle de rayon R , si $\widehat{AOM} = \alpha$ rad, alors $\widehat{AM} = R\alpha$.

Si $\widehat{AM} = \alpha$, alors $\widehat{AM} = \alpha + 2\pi \equiv \alpha + 4\pi \equiv \dots \equiv \alpha - 2\pi \equiv \alpha - 4\pi \equiv \dots$

On note $\widehat{AM} \equiv \alpha [2\pi]$, ou $\widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Propriété • On appelle mesures de l'angle orienté $\widehat{AOM} = (\vec{OA}, \vec{OM})$ tous les réels de la forme $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• On appelle mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, la mesure de l'angle dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

Exercice 1 Donner la mesure principale de :

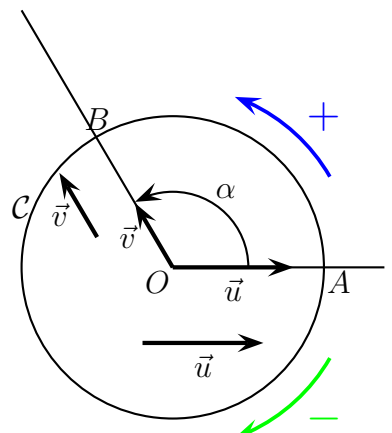
- $-\frac{5\pi}{4}$
- $\frac{11\pi}{4}$
- $-\frac{11\pi}{4}$
- $-\frac{13\pi}{4}$
- $\frac{27\pi}{4}$
- $\frac{2005\pi}{4}$
- $\frac{37\pi}{6}$
- $\frac{178\pi}{8}$

II - Angle orienté d'un couple de vecteurs

Définition Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

Soit \mathcal{C} un cercle trigonométrique de centre O , et M et N tels que $\vec{u} = \vec{OM}$ et $\vec{v} = \vec{ON}$. Les demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ coupent le cercle \mathcal{C} en A et B .

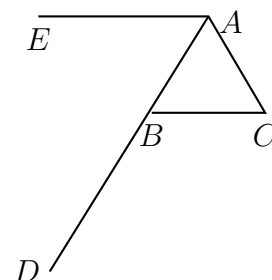
L'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) est l'angle (\vec{OA}, \vec{OB}) dont la valeur absolue est \widehat{AOB} .



Exercice 2 ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ et $(AE) \parallel (BC)$.

Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés :

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}),$$



III - Propriétés des angles orientés

Propriété Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = k2\pi$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi + k2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ (donc $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 [\pi]$).

Si $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires de même sens ; si $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires de sens contraires.

Définition Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux lorsque $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ (donc $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$).

Propriété Relation de Chasles

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} non nuls, on a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$

Corollaire Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls,

$$\bullet (\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) \quad \bullet (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \quad \bullet (-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \quad \bullet (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$$

Démonstration: $\bullet (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u}) = 0$, d'où, $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$.

$$\bullet (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v}), \text{ or } (\vec{v}, -\vec{v}) = \pi, \text{ d'où } (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$$

$$\bullet (-\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})$$

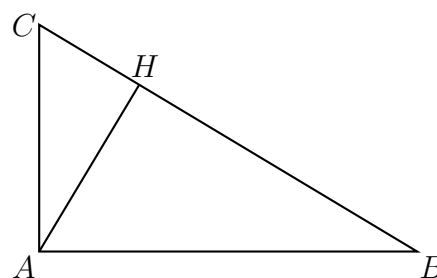
$$\bullet (-\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{v}) + \pi = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + \pi \equiv (\vec{u}, \vec{v}) \quad \square$$

Exercice 3 ABC est un triangle tel qu'une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\frac{\pi}{2}$ et une mesure de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est $-\frac{\pi}{6}$.

La droite (AH) est la hauteur issue de A .

Déterminer les mesures principales des angles :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}); (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}); (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}); (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$$



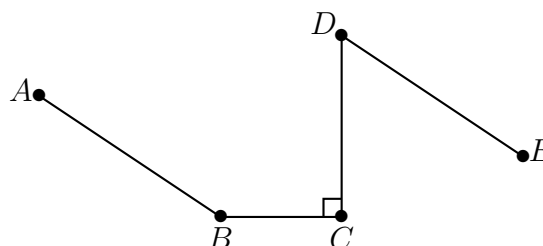
Exercice 4 Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls tels que : $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donner les mesures de : $(\vec{u}, -\vec{v})$; $(3\vec{u}, 2\vec{v})$; $(-2\vec{u}, -4\vec{v})$; $(2\vec{v}, -2\vec{u})$

Exercice 5 Une mesure de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est $-\frac{5\pi}{6}$, et de $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$ est $\frac{\pi}{3}$.

Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE})$.

Que peut-on en conclure quant aux droites (AB) et (DE) ?

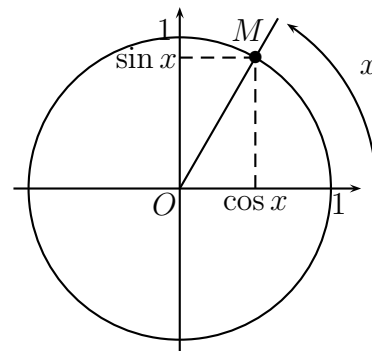


Exercice 6 $ABCD$ est un parallélogramme. Montrer que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

IV - Trigonométrie

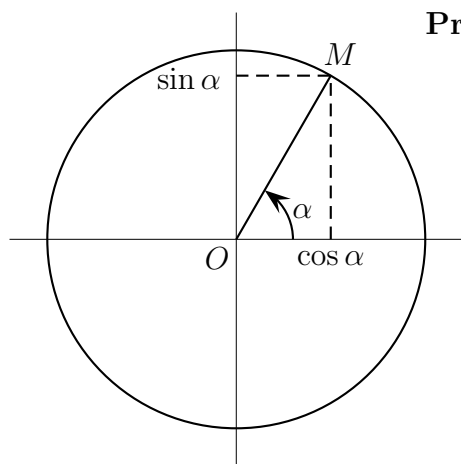
1) Cosinus et sinus d'un angle

Définition Soit $x \in \mathbb{R}$ et M le point du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
Le cosinus, noté $\cos x$, de x est l'abscisse de M ; son sinus, noté $\sin x$, est son ordonnée.



Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1



Propriété Pour tout réel α :

- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$;
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$; $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$;

Exercice 7 Donner les valeurs exactes de :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right); \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right); \quad \cos\frac{5\pi}{6}; \quad \sin\frac{5\pi}{6}; \quad \cos\frac{4\pi}{3}; \quad \sin\frac{4\pi}{3}; \quad \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right); \quad \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right);$$

Exercice 8

1. Soit $x \in [0; \pi]$ tel que $\cos x = -\frac{1}{4}$. Déterminer $\sin x$.
2. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{3}{5}$. Déterminer $\cos x$.

Exercice 9 On pose $m = \sin \frac{\pi}{10}$. Exprimer en fonction de m : $\sin \frac{9\pi}{10}$; $\sin \frac{11\pi}{10}$; $\cos \frac{4\pi}{10}$; $\sin \frac{6\pi}{10}$

Exercice 10 Calculer les expressions suivantes, sans utiliser la calculatrice :

$$\begin{aligned}A &= \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5} . \\B &= \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{11\pi}{8} + \sin \frac{13\pi}{8} . \\C &= \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{9\pi}{10} .\end{aligned}$$

2) Equations trigonométriques

Propriété $L'égalité \cos \alpha = \cos \beta$ équivaut à $\left| \begin{array}{l} L'égalité \sin \alpha = \sin \beta \text{ équivaut à} \\ \alpha = \beta + k2\pi \text{ ou } \alpha = -\beta + k2\pi. \end{array} \right.$

Exemple : $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

Exercice 11

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$.
2. Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ l'équation $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$ et représenter ses solutions sur un cercle trigonométrique.
3. Donner la mesure principale des solutions de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 12 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donner la mesure principale des angles x solutions.

Exercice 13 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = 1$.

Donner la mesure principale des angles x solutions.

Exercice 14 Déterminer les racines de $P(X) = 2X^2 - X - 1$.

En déduire les solutions de l'équation : $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

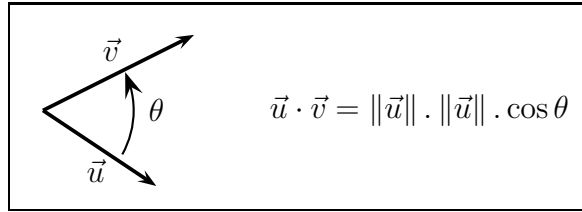
Exercice 15 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $2 \cos^2 x - 3 \cos x = 2$.

Exercice 16 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $4 \sin^2 \left(2x + \frac{5\pi}{6} \right) + 4 \sin \left(2x + \frac{5\pi}{6} \right) = 3$.

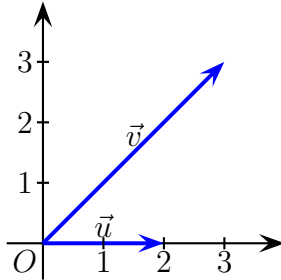
V - Produit scalaire

1) Définitions

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.



Exemple :



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4} = 6$$

Propriétés

- Le produit scalaire est symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.
- Si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires de sens contraires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.
- Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

- Le produit scalaire d'un vecteur \vec{u} avec lui-même, appelé **carré scalaire** et noté \vec{u}^2 , est $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Démonstration:

- $\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{u}) = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos -(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- \vec{u} et \vec{u} colinéaires de même sens $\iff (\vec{u}, \vec{v}) = 0 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \implies \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.
- \vec{u} et \vec{u} colinéaires de sens contraires $\iff (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \implies \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1 \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.
- \vec{u} et \vec{u} orthogonaux $\iff (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \implies \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

□

Propriétés Le produit scalaire est bilinéaire :

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Exercice 17 Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.
2. L'angle \widehat{ACB} est-il aigu ou obtus ?

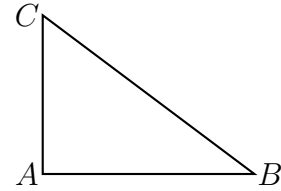
Corollaire *Identités remarquables scalaires :*

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u} + \vec{v}) (\vec{u} - \vec{v})$

Théorème Pythagore !

ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$



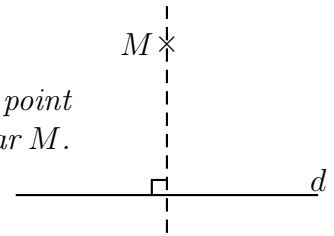
Démonstration: $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

Ainsi, $BC^2 = AB^2 + AC^2 \iff \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{BA}$ et \overrightarrow{AC} orthogonaux

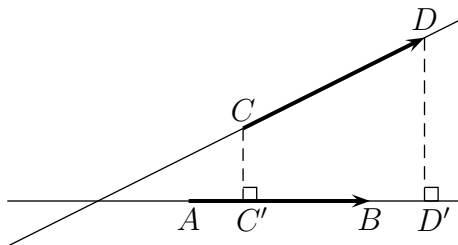
□

2) Projection orthogonale

Définition *Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d est le point d'intersection de la droite d et de la perpendiculaire à d passant par M.*



Propriété *Soit \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} deux vecteurs, et C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB) ; alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.*



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

Démonstration: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D})$

□

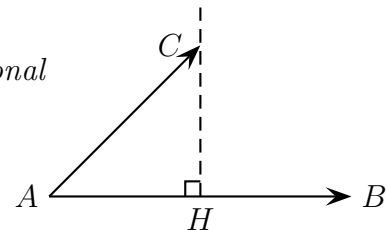
$$= \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'}}_{=0} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D}}_{=0} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

Propriété *Soit trois points A, B et C distincts.*

Alors, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $H \in [AB)$

ou $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $H \notin [AB)$.



3) Produit scalaire et normes

Propriété $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Démonstration: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} + \vec{v}\|^2) \quad \square$

Exercice 18 $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
2. Déterminer une valeur approchée des mesures des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 19 A , B et C sont trois points tels que $AB = 6$, $BC = 5$ et $AC = 9$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. On note E le point tel que $ABEC$ soit un parallélogramme. Déterminer une valeur approchée de la longueur de la diagonale $[AE]$.

4) Expression analytique du produit scalaire

Propriété Soit dans un RON deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, alors, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration: On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$,
avec, $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$, $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$, et, comme $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$,
 $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2$.

On a alors, $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) = xx' + yy'$. \square

Exercice 20 Dans le plan rapporté à un RON, on considère les points $A(-1; 5)$, $B(6; 4)$ et $C(8; -4)$.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Déterminer une mesure, approchée à 10^{-1} près, des angles \widehat{BAC} , \widehat{ABC} et \widehat{BCA} .

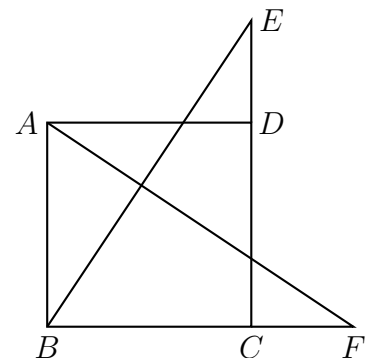
Exercice 21 Dans le plan rapporté à un RON, on considère les points $A(0; 1)$, $B(-1; -6)$, $C(13; -8)$ et $D(-8; -5)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

VI - Exercices

Exercice 22 $ABCD$ est un carré de côté 1, et E et F sont deux points tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

Démontrer que les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires :

1. Par un calcul vectoriel.
2. En se plaçant dans le repère $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.



1) Equation de droites

Exercice 23 Le plan est rapporté à un RON $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(1; -1)$, $B(3; 3)$, $C(-4; 4)$, $D(2; 1)$, $E(17; 12)$ et $F(5; 6)$.

1. Montrer que $(AB) \perp (CD)$.

2. A-t'on $(AB) // (EF)$?
3. Déterminer l'équation de la médiatrice de $[AB]$.
4. Déterminer l'équation de la droite d perpendiculaire à (AB) et passant par l'origine du repère.

Propriété

1. Dans un RON, une droite a pour vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ si et seulement si elle admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.
2. Une droite a pour vecteur directeur $\vec{u}(a; b)$ si et seulement si elle admet une équation cartésienne de la forme $bx - ay + c = 0$.

Démonstration:

1. Soit d une droite de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$, $A(x_A; y_A) \in d$ et $M(x; y) \in d$.
On a alors, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \iff ax + by + c = 0$, avec $c = ax_A + by_A$.
2. Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}(a; b)$, $A(x_A; y_A) \in d$ et $M(x; y) \in d$.
On a alors,

$$\overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires } \iff (x - x_A)b - (y - y_A)a = 0 \iff bx - ay + c = 0, \text{ avec } c = bx_A - ay_A$$

□

2) Caractérisation d'un cercle

Le cercle \mathcal{C} de centre $I(x_0; y_0)$ et de rayon r est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $OM^2 = r^2$.

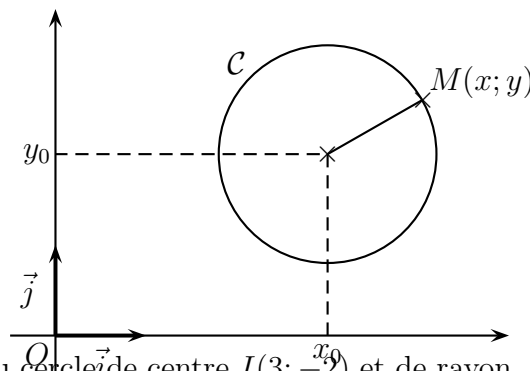
On a $\overrightarrow{OM}(x - x_0; y - y_0)$, et donc, dans un RON $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

$$OM^2 = \overrightarrow{OM}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \text{ d'où}$$

Propriété Dans un RON $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'équation du cercle de centre $I(x_0; y_0)$ est

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Exemple : L'équation $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 12$ est l'équation du cercle de centre $I(3; -2)$ et de rayon $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.



Exercice 24 Le point $A(1; 2)$ appartient-il au cercle \mathcal{C} d'équation : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$?

Ce point A appartient-il à la droite d d'équation $y = 2x$?

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de d et de \mathcal{C} .

Propriété Le cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$:

$$M \in \mathcal{C} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Exemple : Soit \mathcal{C} le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(-1; 3)$ et $B(4; 5)$.

Soit $M(x; y)$ un point de \mathcal{C} , alors $\overrightarrow{MA} \left(\begin{array}{c} \\ \end{array} \right)$, et $\overrightarrow{MB} \left(\begin{array}{c} \\ \end{array} \right)$, d'où

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff \dots$$

Remarque : Tout cercle a donc une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (polynôme du second degré à deux variables).

Par contre, une équation de cette forme n'est pas nécessairement celle d'un cercle.

Exercice 25 On se place dans un RON $(O; \vec{i}, \vec{j})$; déterminer une équation du cercle :

1. \mathcal{C}_1 de centre $A(-3; 4)$ et de rayon 2 ;
2. \mathcal{C}_2 de centre $B(-1; 1)$ passant par $C(3; 2)$;
3. \mathcal{C}_3 de diamètre $[OD]$ avec $D(0; 2)$;
4. \mathcal{C}_4 de diamètre $[EF]$ avec $E(2; -1)$ et $F(-4; -1)$;

Exercice 26 Dans un RON $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les équations suivantes. Pour chacune d'entre elle, dire s'il s'agit de l'équation d'un cercle, et si oui, préciser son centre et son rayon.

1. $x^2 + y^2 - 2x + y + 5 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$
3. $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6y + 7 = 0$.
4. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$
5. $(x - 1)(x - 3) + (y + 2)(y - 1) = 0$
6. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7 = 0$

Exercice 27

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle dont une équation dans le RON $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est : $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ce cercle avec les axes du repère.

Exercice 28 Déterminer l'équation du cercle \mathcal{C} de centre $A(-1; 4)$ et tangent à l'axe des abscisses.

Exercice 29 On donne le point $A(1; 2)$ et la droite d d'équation $x + 2y = 0$.

Démontrer que le cercle de centre A passant par O est tangent à d .

Exercice 30 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un RON direct.

Soit A et B les points du cercle trigonométrique \mathcal{C} associés aux angles $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.

1. Quelle est la mesure de l'angle \widehat{AOB} ?
2. a) Quelles sont les coordonnées de A et B ?

b) En déduire que $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

3. a) Justifier que $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos \frac{\pi}{12}$.

b) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$, puis vérifier que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

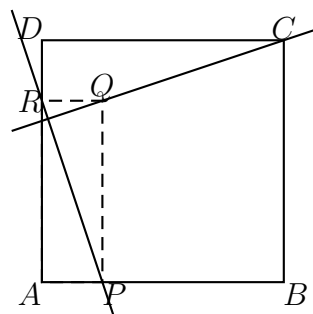
Exercice 31 Soit $ABCD$ un carré.

On construit un rectangle $APQR$ tel que :

- P et R sont sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$
- $AP = DR$.

1. Justifier que : $\vec{CQ} \cdot \vec{PR} = \vec{CQ} \cdot (\vec{AR} - \vec{AP})$.

2. En déduire que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.



Exercice 32 On se place dans un RON, dans lequel on considère le triangle ABC avec $A(-1; 2)$, $B(3; 1)$ et $C(2; 4)$.

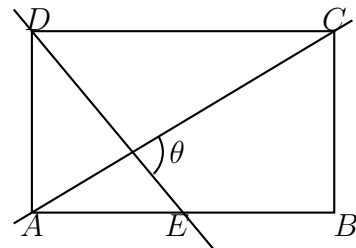
1. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

Exercice 33 Dans un RON, on donne $\Omega(2; -3)$.

1. Déterminer l'équation du cercle C de centre Ω et de rayon $R = 5$.
2. Démontrer que le point $A(-2; 0)$ est un point du cercle C .
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle C .

Exercice 34 $ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$. E est le milieu de $[AB]$.

1. Calculer les longueurs AC et DE .
2. En exprimant chacun des vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{DE} en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} , calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE}$.
3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AC})$ à 10^{-2} degré près.



Exercice 35

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de côtés respectifs 6 cm et 4 cm.

O est le milieu de $[GD]$.

Les droites (OA) et (EB) sont-elles perpendiculaires ?

