

Exercice 1 Dans un village, on sait (c'est un petit village, tout se sait...) que 86% des habitants sont pleinement satisfaits de leur maire et vont donc revoter pour lui aux prochaines élections municipales.

Plus par habitude qu'autre chose, un sondage préélectoral est mené.

Pour faire vite, ce sondage est effectué auprès d'un petit échantillon de 50 personnes, bien sûr 50 personnes prises aléatoirement dans la population.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes, dans cet échantillon, annonçant revoter pour le maire actuel.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
2. Combien de personnes dans cet échantillon s'attend-on à avoir annonçant revoté pour le même maire.
Quelle est la probabilité d'avoir cette valeur pour X ?
3. En fait, comme ces 50 personnes sont tirées au hasard, il n'est pas étonnant d'avoir une valeur différente de celle attendue. Le nombre peut varier, ou fluctuer, d'un échantillon pris au hasard de 50 personnes à un autre échantillon de 50 personnes.
 - a) Déterminer la probabilité pour que dans un échantillon de 50 personnes, il y en ait moins de 10 annonçant revoter pour le même candidat. Commenter.
 - b) Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) \geq 2,5\%$.
 - c) Déterminer le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 97,5\%$.

L'intervalle $[a; b]$ ici trouver s'appelle l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% : dans une population où 86% des personnes annoncent revoter pour le maire, il y a une probabilité d'environ 95% pour que le nombre de personnes dans un échantillon de 50 personnes prises au hasard soit dans l'intervalle $[37; 47]$, ou encore que la proportion observée soit dans l'intervalle $\left[\frac{37}{50}; \frac{47}{50}\right] = [74\%; 94\%]$.

Comparer cete intervalle avec celui vu en seconde : $\left[86\% - \frac{1}{\sqrt{n}}; 86\% + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

4. Sur les 50 personnes interrogées, 35 seulement ont indiqué vouloir revoter pour le maire actuel. Qu'en penser ?

Exercice 2 Une usine s'est implantée aux abords d'une ville il y a maintenant quelques années. Cette usine traite des produits chimiques dont on ne sait pas encore évaluer l'influence sur l'environnement et l'homme en particulier. Depuis son ouverture, la maternité de la ville à enregistré 6200 naissances, dont seulement 3025 filles.

On considère que, normalement, les probabilités de naissance d'un garçon et d'une fille sont égales.

1. À combien de naissances de filles s'attend-on ?
2. Déterminer, comme dans l'exercice précédent, les valeurs du plus grand entier a et du plus petit entier b tels que $P(X \leq a) \geq 2,5\%$ et $P(X \leq b) \geq 97,5\%$.
3. Que conclure de ces résultats ?
4. Comparer avec la formule de l'intervalle de fluctuation $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.