Second degré

I - Résolution de l'équation du second degré

Définition *Une équation du second degré, à une inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$, où a, b, et c sont trois nombres réels donnés, et $a\neq 0$.*

$P(x)=ax^2+bx+c$ est une fonction polynôme, ou trinôme, du second degré.

Résoudre l'équation $P(x)=ax^2+bx+c=0$, c'est trouver tous les nombres réels x tels que $P(x)=ax^2+bx+c=0$. Un tel nombre est dit solution de l'équation $P(x)=0$ ou encore racine du polynôme $P(x)$.

Exemple : $P(x)=3x^2-2x+4$ est un trinôme du second degré, avec $a=3$, $b=-2$ et $c=4$.
$Q(x)=-x^2+16$ est un trinôme du second degré, avec $a=-1$, $b=0$ et $c=16$.

Exercice 1 Résoudre les équations du second degré :
a) $x^2-9=0$ b) $2x^2+3x=0$ c) $(x+3)^2-4=0$
d) $-3(x-1)(x+2)=0$ e) $2x^2+3=0$

Exercice 2

- Résolution de (E_1) : $x^2+2x-8=0$.
  Compléter : $x^2+2x=(x+\dots)^2+\dots$, puis résoudre (E_1).
- Résolution de (E_2) : $x^2+4x+5=0$.
  Compléter : $x^2+4x+5=(x+\dots)^2+\dots$, puis résoudre (E_2).
- Résolution de (E_3) : $2x^2-x-3=0$.
  Compléter : $2x^2-x-3=2\Big[\ \dots\ \Big]=2\Big[(x+\dots)^2+\ \dots\ \Big]$, puis résoudre (E_3).

Cas général Résolution de l'équation $P(x)=ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$.

$$\begin{aligned}
P(x) &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

Cette expression s'appelle la forme canonique du polynôme P.
On pose $\Delta=b^2-4ac$, et on a donc,

$$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

<u>Si $\Delta < 0$</u> , alors $\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$, et donc, $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$.
L'équation $P(x) = 0$ n'a donc aucune solution.

<u>Si $\Delta = 0$</u> , alors $P(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$, et l'équation $P(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ admet une unique solution $x = -\dfrac{b}{2a}$.

<u>Si $\Delta > 0$</u> , alors $\sqrt{\Delta}$ existe et, $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$, et donc, $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, et,

$$\begin{aligned}P(x) &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{2a}\right)^2\right]\\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\Delta}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\Delta}{2a}\right)\\ &= a\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\end{aligned}$$

On pose $x_1 = -\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, et, $x_2 = -\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, et on a alors :

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

et donc, l'équation $P(x) = ax^2+bx+c = 0$ admet deux solutions distinctes, x_1 et x_2.

Définition *Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le <u>discriminant</u> du trinôme du second degré $P(x) = ax^2+bx+c$.*

Exercice 3 Calculer le discriminant des trinômes :

a) $P(x) = x^2+x+1$ b) $Q(x) = 3x^2-2x+1$ c) $R(x) = -x^2+3x-1$

d) $S(x) = -x^2-2x+10$ e) $T(x) = -3x^2-x+2$ f) $U(x) = x^2-2x+1$

Théorème
- *Si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine ;*
- *Si $\Delta = 0$, le trinôme a une racine "double" $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, et le trinôme se factorise suivant $P(x) = a(x-x_0)^2$.*
- *Si $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes :*

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textit{et,} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et le trinôme se factorise suivant $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Exercice 4 Résoudre $P(x) = 0$, avec :

a) $P(x) = x^2-3x+4$ b) $P(x) = 3x^2-\dfrac{7}{2}x+\dfrac{49}{48}$ c) $P(x) = 3x^2-x-4$

d) $P(x) = 3x^2-27$ e) $P(x) = 6x^2-24x$ f) $P(x) = 3x^2-12+(x-2)(x+3)$

Exercice 5 Factoriser les expressions suivantes :

a) x^2-3x+2 b) $x^2-7x+10$ c) $2x^2-5x+2$ d) $-3x^2+4x+4$ e) $-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+1$

Exercice 6

1. Déterminer un trinôme du second degré admettant 2 et -5 comme racines.
2. Déterminer la fonction trinôme du second degré f vérifiant les conditions suivantes : $f(2)=0$, $f(-3)=0$ et $f(1)=4$.

Exercice 7 Résoudre les équations :

a) $x^4-3x^2+2=0$ b) $2x^4+9x^2+4=0$ c) $2|x|^2-5|x|-12=0$ d) $x^2-\dfrac{1}{x^2}=12$

Exercice 8 Soit le polynôme $P(x)=x^4+6x^3-11x^2-60x+100$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction trinôme du second degré $Q(x)=ax^2+bx+c$ vérifie la relation :
$$P(x)=(Q(x))^2$$
2. Résoudre alors l'équation $P(x)=0$.
3. a) Trouver trois réels a, b, c tels que $x^3+6x^2+6x+5=(x+5)(ax^2+bx+c)$.
   b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction rationnelle f suivante et la simplifier
$$f(x)=\frac{x^4+6x^3-11x^2-60x+100}{x^3+6x^2+6x+5}\,.$$

II - Inéquation du second degré

Exemple : Factoriser puis déterminer le signe du trinôme du second degré de : $P(x)=2x^2-6x+4$.

Soit $P(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ un trinôme du second degré, alors,

- si $\Delta<0$, alors $P(x)=a\underbrace{\left[\underbrace{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2}_{\geqslant 0}\underbrace{-\dfrac{\Delta}{4a^2}}_{>0}\right]}_{>0}$ est toujours du signe de a.
- si $\Delta=0$, alors $P(x)=a\left(x-x_0\right)^2$ est toujours du signe de a, et $P(x)=0$ pour $x=x_0=-\dfrac{b}{2a}$.
- si $\Delta>0$, alors $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, et (en supposant par exemple $x_1<x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		signe de a	|	signe de a	|	signe de a	
$x-x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

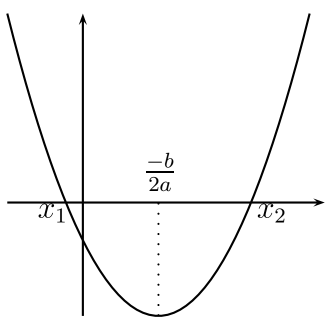
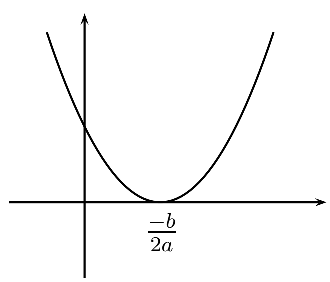
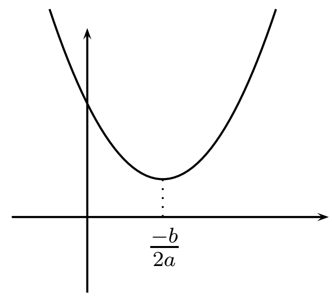
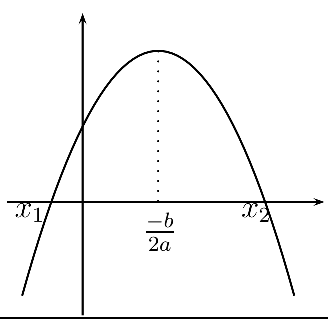
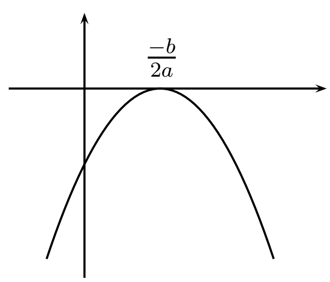
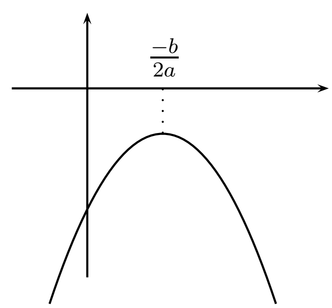
Théorème *Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme du second degré avec $a\neq 0$, alors :*

- *si $\Delta<0$, $P(x)$ est toujours du signe de a ;*
- *si $\Delta=0$, $P(x)$ s'annule pour $x=x_0=-\dfrac{b}{2a}$, et pour $x\neq x_0$, $P(x)$ est du signe de a ;*
- *si $\Delta>0$, $P(x)$ admet deux racines x_1 et x_2, et $P(x)$ est du signe de a "à l'extérieur des racines" et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.*

Trinôme du second degré : synthèse

Pour un trinôme du second degré : $\underline{f(x) = ax^2 + bx + c}$, où a, b et c sont trois réels, et $a \neq 0$.

Le discriminant du trinôme est $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ (racines de f)	2 solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	une solution unique (double) : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	pas de solution
Factorisation de $f(x)$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	pas de factorisation
Courbe représentative de f, si $a > 0$			
Courbe représentative de f, si $a < 0$			
Signe de $f(x)$	x : $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ f : Signe de a | 0 | Signe de -a | 0 | Signe de a	x : $-\infty$ | x_0 | $+\infty$ f : Signe de a | 0 | Signe de a	x : $-\infty$ | $+\infty$ f : Signe de a

Exercice 9 Déterminer le signe de $P(x)$ où,

a) $P(x) = x^2 + 4x - 5$ b) $P(x) = -x^2 + x + 6$ c) $P(x) = 3 - 2x + x^2$ d) $P(x) = -x^2 + x\sqrt{2} - 1$

Exercice 10 Résoudre les inéquations :

a) $x^2 + 4x - 4 \leqslant 0$ b) $-x^2 + x + 6 > 0$ c) $-2x^2 + x + 1 < 0$
d) $2x^2 - 24x + 12 < -60$ e) $29x \geqslant x^2 - 96$ f) $m^2 + m - 20 \leqslant 0$

Exercice 11 Déterminer le réel m pour que le trinôme $f(x) = -x^2 + 2x - m$ soit négatif pour tout x.

Exercice 12 Soit m un nombre réel, et f la fonction trinôme définie par $f(x) = mx^2 + 4x + 2(m-1)$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ admet-elle une seule racine ? Calculer alors cette racine.

2. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x)=0$ admet-elle deux racines distinctes ?
3. Quel est l'ensemble des réels m pour lesquels $f(x)<0$ pour tout réel x ?

Exercice 13 Dans cet exercice, $f(x)$ désigne le trinôme ax^2+bx+c, avec $a\neq 0$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant les réponses :

1. Si pour tout réel x, $f(x)<0$, alors $\Delta<0$.
2. S'il existe deux réels α et β tels que $f(\alpha)f(\beta)<0$, alors $\Delta\geq 0$.
3. Si $\Delta<0$, alors pour tout réel x, $f(x)<0$.
4. Si $\Delta>0$ et si α et β sont deux réels tels que $x'<\alpha<x''<\beta$ (x' et x'' étant les racines du polynôme), alors $f(\alpha)f(\beta)<0$.

III - Relation entre les coefficients du trinôme et les racines

Dans le cas $\Delta>0$, le trinôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2, et se factorise alors suivant :

$$P(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

et donc, en développant,

$$P(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2\,.$$

En identifiant alors les coefficients des ces expressions, on a alors :

$$\left\{\begin{array}{l} b=-a(x_1+x_2)\\ c=ax_1x_2\end{array}\right. \text{ soit, } \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{array}\right.$$

Propriété *Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$, alors on a les relations :*

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{array}\right.$$

Réciproquement, deux nombres x_1 et x_2 tels que $S=x_1+x_2$ et $P=x_1x_2$ sont solutions de l'équation du second degré : $x^2-Sx+P=0$.

Exercice 14 Pour chacun des trinômes suivants, rechercher une racine évidente puis calculer la deuxième racine. Vérifier les résultats à l'aide du calcul du discriminant.

a) $P(x)=x^2+4x-5$ b) $Q(x)=x^2+7x+6$ c) $R(x)=-x^2+x+6$ d) $S(x)=x^2+x\sqrt{2}-4$

Exercice 15 Donner deux nombres réels dont la somme vaut 12 et le produit 35.

Exercice 16 Quelles sont les dimensions d'un rectangle de demi-périmètre 25 m et d'aire 114 m^2 ?

IV - Polynômes

Définition
- *Un* **monôme** *est une expression algébrique de la forme ax^n, où a est réel et n un entier naturel.*
- *Un* **polynôme** *est une somme de monôme, c'est-à-dire une expression de la forme :*
$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + dx^2 + ex + f$$

Exemple : $P(x) = 5x^7 + 4x^6 + 3x^2 - 2$; $Q(x) = \dfrac{3}{2}x^{17} - \sqrt{3}x^{12} + 17x^5 - 1,45x^4 + 2x - \dfrac{3}{\sqrt{2}}x + 3$

Définition *On dit que deux polynômes P et Q sont égaux, noté $P = Q$, si pour tout réel x, on a $P(x) = Q(x)$.*

Propriété *(admise) Deux polynômes sont égaux si et seulement si leur coefficient respectif de chaque monôme de même degré sont égaux.*

Exemple : Soit $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2$ et $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, alors,
$$P = Q \iff \left\{\begin{array}{l} a = 5 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = -2 \end{array}\right.$$

Si un polynôme P peut s'écrire sous la forme $P(x) = (x - a)Q(x)$, on dit que P se factorise par $x - a$.

Dans ce cas, on a facilement que $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$, c'est-à-dire que a est une racine de P.

La récirpoque est aussi vraie :

Théorème *(admis) Un polynôme P admet le réel a comme récine si et seulement si P se factyorise par $x - a$, c'est-à-dire si et seulement si il existe un polynôme Q tel que $P(x)(x - a)Q(x)$ pour tout x.*

Exemple : Soit $P(x) = x^3 - 7x^2 + x + 18$. Calculer $P(2)$ et en déduire une factorisation de P. Déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 17 Soit $P(x) = 6x^3 - x^2 - 4x + 3$. Calculer $P(-1)$ et en déduire une factorisation de $P(x)$ puis toutes les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 18 Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$. Calculer $P(1)$ et $P(2)$ puis factoriser $P(x)$. Déterminer alors le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.