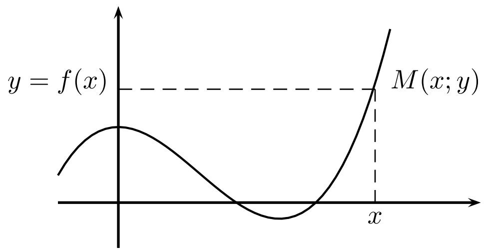
Généralités sur les fonctions

I - Rappels

1) Courbe représentative d'une fonction

Définition *La courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$, où x appartient à l'ensemble de définition de f.*



$M(x; y) \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$

Exemple : Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x - 1$.
Un point $M(x; y)$ est sur $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$, c'est-à-dire si $y = 2x - 1$.
$\mathcal{C}_f$ est donc la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Exercice 1 Soit $f(x) = 2x^2 - x + 3$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Le point $A(10; 193)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?
2. Le point $B(-5; 60)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?
3. Quelle est l'ordonnée du point C de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 100 ?
4. Quelle est l'abscisse du point D de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée 3 ?

Exercice 2 Soit les fonctions f et g définies par les expressions $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = x - 1$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2) Ensemble de définition d'une fonction

Définition *L'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.*

Exemple : Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$.

$f(x)$ existe si et seulement si le dénominateur $2x - 3$ n'est pas nul, soit $2x - 3 \neq 0 \iff x \neq \dfrac{3}{2}$.

Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Exercice 3 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{5x^2 + 3x - 2}{4x + 5}$ $\qquad g(x) = 12x^4 - \dfrac{3}{2x}$ $\qquad h(x) = \sqrt{4x - 2}$

$l(x) = \sqrt{(2x - 3)(x + 2)}$ $\qquad k(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

3) Fonctions usuelles

a) Fonctions affines

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et dont l'expression est de la forme $f(x) = ax+b$, où a et b sont deux nombres réels.
La courbe représentative de la fonction affine $f(x) = ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$.

b) Fonction carré

La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

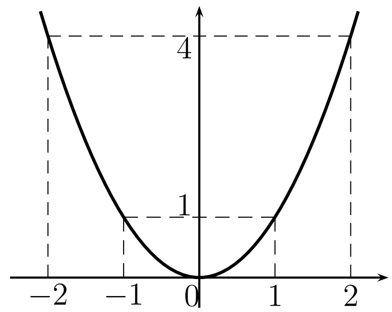
$$\boxed{f(x) = x^2}$$

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



c) Fonction cube

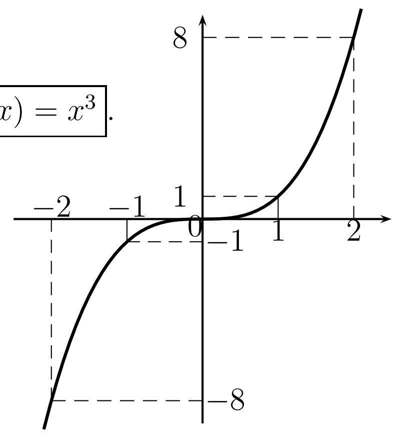
La fonction cube est la fonction f définie pour tout x réel par $\boxed{f(x) = x^3}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8



d) Fonction inverse

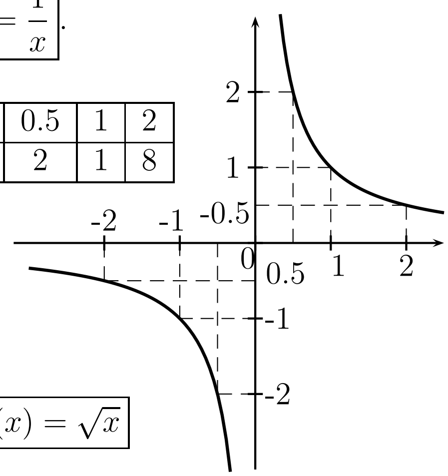
La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x}}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

Tableau de valeurs

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$f(x)$	-0.5	-1	-2	0	2	1	8



e) Fonction racine carrée

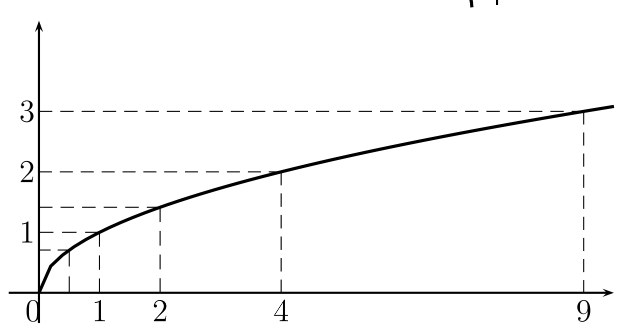
La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$: $\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$

Tableau de variations

x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	

Tableau de valeurs

x	0	0.5	1	2	4	9
$f(x)$	0	$\simeq 0.7$	1	2	$\simeq 1,4$	3

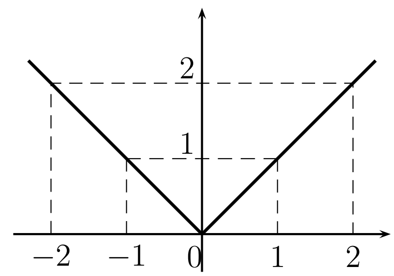


f) Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Par exemple, $|5| = 5$; $|-12| = 12$; $|x^2| = x^2$.



Exercice 4 On considère les fonctions f et g définies sur $[-2; 3]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

1. Donner le tableau de variation de f et g, et tracer les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ représentatives des fonctions f et g.
2. Répondre par vrai ou faux, en corrigeant si l'affirmation est fausse :
   a) Si $x > 1$, alors $f(x) > 2$
   b) Si $-2 \leq x \leq 3$, alors $4 \leq f(x) \leq 9$
   c) Si $x > 2$, alors $f(x) > g(x)$
   d) Si $0 \leq x \leq 1$, alors $f(x) \geq g(x)$
   e) Si $x < 0$, alors $g(x) > f(x)$

Exercice 5 On considère les fonctions f et g définies sur $]0; 2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = 2x - 1$.

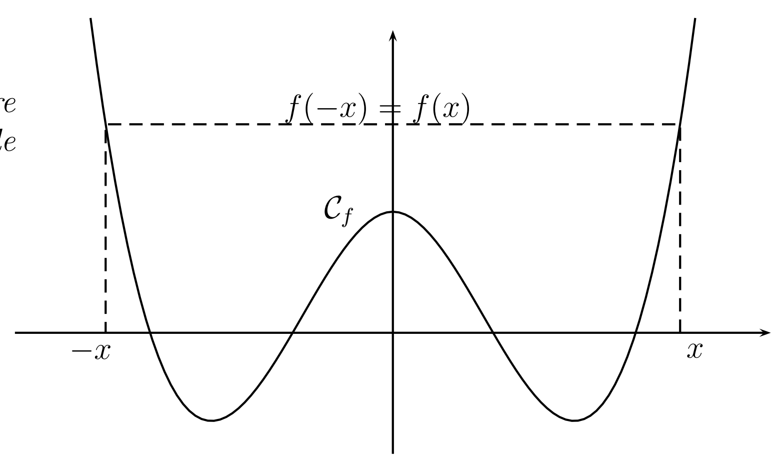
1. Donner le tableau de variation de f et g, et tracer les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ représentatives des fonctions f et g.
2. Répondre par vrai ou faux, en corrigeant si l'affirmation est fausse :
   a) Si $x > 1$, alors $f(x) > 1$
   b) Si $x < 1$, alors $f(x) < 1$
   c) Si $x > 1$, alors $f(x) > g(x)$
   d) Si $0 < x \leq 1$, alors $f(x) \geq 1$
   e) Si $x < 2$, alors $f(x) > 0,5$

II - Parité d'une fonction

Définition *Une fonction f est dite paire si pour tout x de son ensemble de définition, $-x$ est aussi dans son ensemble de définition, et $f(-x) = f(x)$.*

Propriété

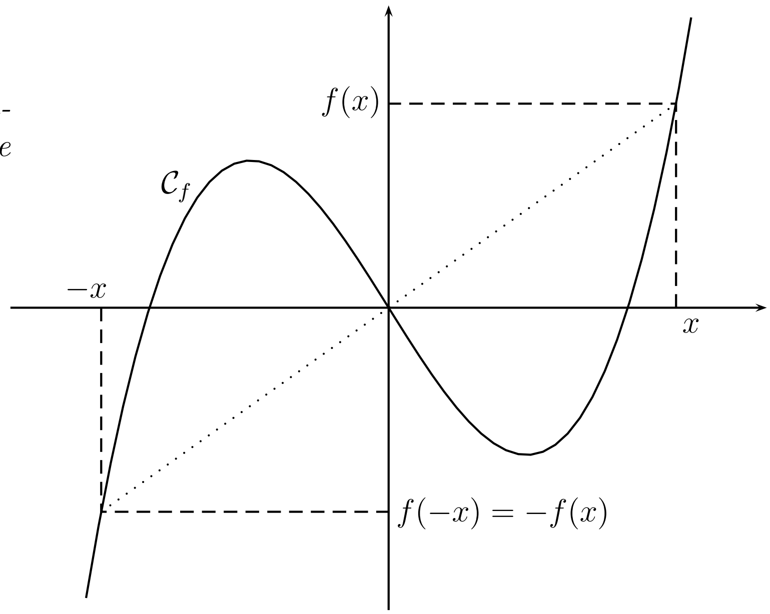
La courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.



Définition *Une fonction f est dite impaire si pour tout x de son ensemble de définition, $-x$ est aussi dans son ensemble de définition, et $f(-x) = -f(x)$.*

Propriété

La courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



Exercice 6 Etudier la parité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 3$ b) $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ e) $f(x) = |x|$ f) $f(x) = \sqrt{x}$

III - Opérations sur les fonctions

1) Définition des opérations

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.
On définit alors :

- **l'addition de f et du nombre réel** λ, $h = f + \lambda$ par, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $h(x) = f(x) + \lambda$
- **l'addition de f et** g, $h = f + g$ par, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_g$, $h(x) = f(x) + g(x)$
- **le produit de f par un nombre réel** λ, $h = \lambda f$ par, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $h(x) = \lambda f(x)$
- **le produit de f et** g, $h = fg$ par, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_g$, $h(x) = f(x)g(x)$
- **l'inverse de** f, $h = \dfrac{1}{f}$ par, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f(x) \neq 0$, $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
- **le quotient de f par** g, $h = \dfrac{f}{g}$ par, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_g$ tel que $g(x) \neq 0$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- **la racine carrée de** f, $h = \sqrt{f}$ par, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f(x) \geqslant 0$, $h(x) = \sqrt{f(x)}$

Exemples :
Soit $h(x) = x^2 + 3$, alors h est la somme de la fonction carré $f(x) = x^2$ et du nombre réel $\lambda = 3$, $h = f + 3$.
Soit $h(x) = 4x^3 + 2x - 1$, alors h est la somme des fonctions $f(x) = 4x^3$ et de la fonction affine $g(x) = 2x - 1$. f est de plus le produit de la fonction cube $u(x) = x^3$ par le nombre réel $\lambda = 4$. On a donc $h = 4u + g$.

2) Sens de variation

Propriété
- *La somme $f+\lambda$, où λ est un nombre réel, à même sens de variation que f.*
- *La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) sur un intervalle I est une fonction croissante (resp. décroissante).*
- *La fonction λf, où λ est un réel non nul, a même sens de variation que f si λ est strictement positif, et un sens contraire si λ est strictement négatif.*
- *La fonction $\dfrac{1}{f}$ a un sens de variation contraire à celui de f.*
- *La fonction $\sqrt{f}$ a même sens de variation que f.*

Remarque : Il n'y a pas de résultat général pourla différence, le produit et le quotient de deux fonctions.

Démonstration:

- **Somme** $h=f+\lambda$. Supposons par exemple que f soit croissante, alors, pour tout x et y de $\in \mathcal{D}_f$ tels que $x<y$, on a $f(x)<f(y)$.
  On en déduit que $f(x)+\lambda<f(y)+\lambda$, et donc que $h(x)<h(y)$: $h=f+\lambda$ est aussi croissante.
- **Somme** $h=f+g$. Supposons par exemple que f et g soient croissantes, alors, pour tout x et y de $\in \mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}_g$ tels que $x<y$, on a $f(x)<f(y)$ et $g(x)<g(y)$
  On en déduit que $f(x)+g(x)<f(y)+g(y)$, et donc que $h(x)<h(y)$: $h=f+g$ est aussi croissante.
- **Produit** $h=\lambda f$. Supposons par exemple $\lambda>0$ et f soit croissante, alors, pour tout x et y de $\in\mathcal{D}_f$ tels que $x<y$, on a $f(x)<f(y)$.
  On en déduit, comme $\lambda>0$, que $\lambda f(x)<\lambda f(y)$, et donc que $h(x)<h(y)$: $h=\lambda f$ est aussi croissante.

□

Exercice 7

a) Démontrer que, si λ est un réel strictement négatif et f une fonction décroissante sur un intervalle I, alors la fonction $h=\lambda f$ est croissante sur I.

b) Démontrer que si f est une fonction croissante sur un intervalle I, alors $h=\dfrac{1}{f}$ est décroissante sur I.

Exercice 8 Etudier le sens de variation des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$ b) $f(x)=-5x^2$ c) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$

d) $f(x)=\sqrt{-3x+2}$ e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-10$

Exercice 9 On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x)=x+|x| \qquad \text{et,} \qquad g(x)=x-|x|$$

1. Déterminer l'expression de la fonction produit $h=fg$.
2. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions f et g.

Exercice 10
On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2x+5}{x+1}$$

et on appelle $\mathcal{C}$ sa représentation graphique par rapport à un repère orthogonal du plan.

1. Montrer que, pour tout $x \neq -1$, on a :

$$f(x) = 2 + \frac{3}{x+1}\,.$$

2. A l'aide de l'expression précédente, étudier le sens de variation de la fonction f.

3) Composition de fonctions

Définition *Etant donné deux fonctions f et g, on définit la fonction u composée de f et g, notée $u = f \circ g$ (f "rond" g) par :*

$$u(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Exemple : Soit $g(x) = x - 2$ et $f(x) = \sqrt{x}$. Alors, pour tout $x \geqslant 2$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-2) = \sqrt{x-2}$$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r] & \sqrt{X} \\
x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & x-2 \arrow[r, "f"] & \sqrt{x-2}
\end{tikzcd}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 2$$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r] & X-2 \\
x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \sqrt{x} \arrow[r, "g"] & \sqrt{x}-2
\end{tikzcd}$$

Attention, en général, $g \circ f \neq f \circ g$!

Exercice 11 Soit $h_1 : x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $h_2 : x \mapsto x^2 + 1$.

1. Donner les ensembles de définition de h_1 et h_2.
2. Pour chacune des fonctions suivantes, donner son expression et son ensemble de définition :

$$h_2 \circ h_1 \quad ; \quad h_1 \circ h_2 \quad ; \quad h_1 \circ h_1 \quad ; \quad h_2 \circ h_2$$

Exercice 12 Les fonctions u, v et w sont respectivement définies sur les intervalles $[-2,4]$, $]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = x+3\,, \quad v(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad w(x) = 2 - 7x\,.$$

1. Soit $f = w \circ v \circ u$. Démontrer que f est définie par l'expression $f : x \mapsto 2 - \dfrac{7}{x+3}$.
2. Étudier le sens de variation de f sur $[-2,4]$.
3. Encadrer $f(x)$ au mieux sur $[-2,4]$.

Exercice 13 Étudier le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{-2x^2+8}} + 123$.