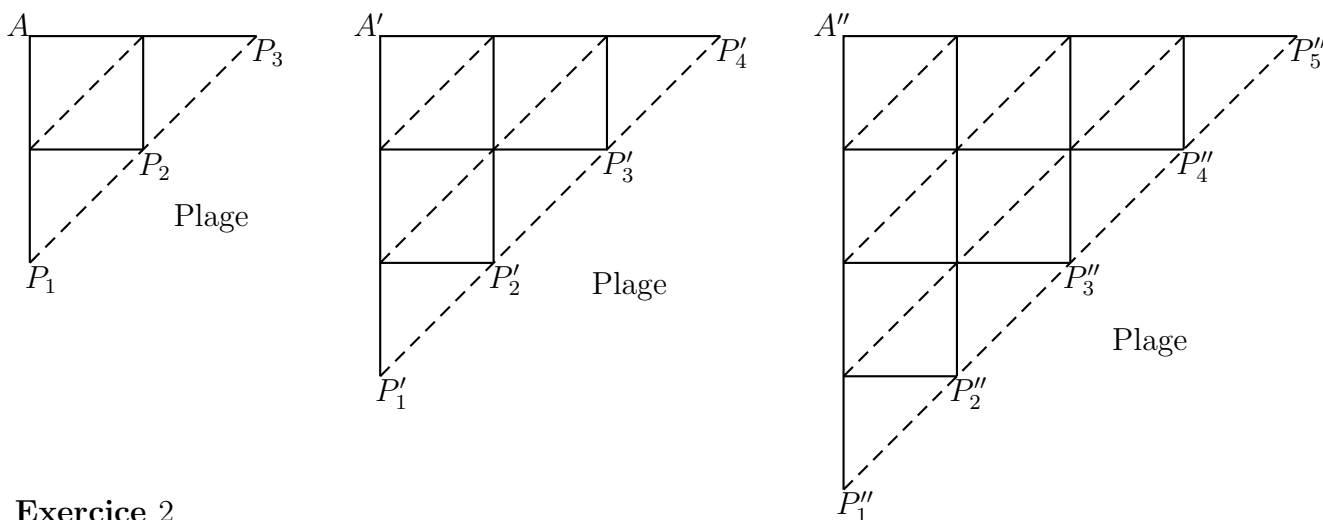


I - Coefficients binomiaux

Exercice 1 Dans une ville du bord de mer, les routes sont toutes orientées Ouest-Est ou Nord-Sud.

On souhaite, en partant du point A , rejoindre la plage. Pour ce faire, on se déplace toujours sur le plan de gauche à droite et de haut en bas. De nombreux itinéraires sont envisageables, et on souhaite justement les dénombrer.

Dénombrer le nombre de chemins différents menant du point A , A' et A'' aux points $P_1, P_2, P_3, P'_1, P'_2, \dots$ au bord de plage dans chacun des cas suivants.



Exercice 2

- On lance une pièce bien équilibrée 2 fois successivement.
 - Représenter la situation par un arbre.
 - Combien de façons y-a-t'il d'obtenir exactement : 0 fois Pile? 1 fois Pile? 2 fois Pile?
- Mêmes questions en lançant 3 fois successivement cette pièce : combien de façons y-a-t'il d'obtenir exactement 0 fois Pile, 1 fois Pile, 2 fois Pile et 3 fois Pile?
- Mêmes questions en lançant 4 fois successivement cette pièce : combien de façons y-a-t'il d'obtenir exactement 0 fois Pile, 1 fois Pile, 2 fois Pile, 3 fois Pile et 4 fois Pile?

Définition On appelle coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, le nombre de façons de réaliser k succès parmi n répétitions.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir k éléments dans une liste de n éléments, $\binom{n}{k}$ se lit aussi "k parmi n".

Exercice 3 Exprimer les nombres recherchés à l'aide des coefficients binomiaux.

- Combien y'a-t-il de façons de choisir 2 as parmi les 4 as d'un jeu de carte?
- Dans une classe de 30 élèves, on doit choisir 2 délégués. Combien de façons y a-t-il de les choisir?
- Combien de mots de passe de 4 caractères alphabétiques peut-on former?

Triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5				

Propriété Pour tous entiers n et k tels que $0 \leq k \leq n - 1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration: $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de réaliser k succès parmi n répétitions.

On peut distinguer deux cas parmi ces façons :

- ceux qui commencent par un succès ; il faut donc ensuite ... succès parmi ... répétitions.

Leur nombre est $\binom{n-1}{k}$.

- ceux qui ne commencent pas par un succès ; il faut donc ensuite ... succès parmi ... répétitions.

Leur nombre est $\binom{n-1}{k-1}$.

Au total, on a donc, $\binom{n}{k} = \dots + \dots$ □

Exercice 4 Effectuer les calculs des coefficients binomiaux de l'exercice 3.

Exercice 5 On tire au hasard cinq cartes dans un jeu de 32 cartes.

- Combien de mains différentes peut-on former ?
- Quel est le nombre de mains différentes qui contiennent les 4 as ?
- En déduire la probabilité d'avoir un carré d'as.

Exercice 6 On lance une pièce de monnaie équilibrée 10 fois de suite.

Calculer la probabilité d'obtenir exactement 6 fois "pile".

II - Loi binomiale

Définition Epreuve et loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée succès et de probabilité p , l'autre appelée échec et de probabilité $1 - p$.

La loi de probabilité est alors appelée loi de Bernoulli de paramètre p .

issue	succès	échec
probabilité	p	$1 - p$

Exemple : On lance un dé cubique équilibré. On appelle succès

l'événement : S "un six est obtenu". Sa probabilité est $p = \frac{1}{6}$.

On obtient la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

issue	succès	échec
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Définition Un **Schéma de Bernoulli** est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (c'est-à-dire que l'issue d'une épreuve ne dépend pas des issues des épreuves précédentes).

Exercice 7 On tire au hasard successivement et avec remise trois cartes dans un jeu de 32 cartes. A chaque tirage, tirer un as est considéré comme un succès.

- Montrer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.
- Représenter la situation par un arbre pondéré.
- On note X la variable aléatoire égale au nombre d'as tirés. Donner la loi de probabilité de X .

Définition On considère un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves. On note X la variable aléatoire qui à chaque liste de n résultats associe le nombre de succès.
La loi de probabilité de la variable X est appelée **loi binomiale** de paramètre n et p , et est notée $\mathcal{B}(n; p)$.

Exercice 8 Une urne contient 4 boules : 1 verte et 3 rouges. On tire 3 fois de suite une boule dans cette urne, en y remplaçant la boule tirée après chaque tirage.

On note S l'événement "tirer une boule verte", et X la variable aléatoire égale au nombre de fois que la boule verte est tirée.

1. Décrire la situation par un arbre pondéré, et montrer que X suit une loi binomiale.
2. Calculer la probabilité des événements $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ et $X = 3$.

Propriété Si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètres n et p , alors,

$$\text{pour tout entier } k, \text{ avec } 0 \leq k \leq n, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

De plus, l'espérance de X est $E(X) = np$; et sa variance est $V(X) = np(1 - p)$.

Exercice 9 Un élève répond au hasard aux 6 questions d'un QCM. A chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

1. Montrer que la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que l'élève a d'avoir exactement 3 bonnes réponses.
3. Calculer la probabilité que l'élève a d'avoir au moins 3 bonnes réponses.
4. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

Exercice 10 Dans une ville de 50 000 habitants, on a recensé 1 000 cas de grippe. On s'intéresse au nombre d'enfants malades dans une crèche de 30 enfants.

On note X le nombre d'enfants atteints par la grippe et on modélise la loi de X par une loi binomiale.

1. Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X .
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
a) A : "Deux enfants exactement sont malades" b) B : "Il y a au moins un enfant malade".

Exercice 11 Une étude statistique a montré qu'une mère qui possède un caractère génétique C le transmet à son enfant dans un cas sur dix. Une femme, qui possède ce caractère génétique C , souhaite fonder une famille de quatre enfants.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'enfants parmi les quatre qui présentant le caractère C .

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
2. Calculer la probabilité de l'événement : "Un enfant au moins présente le caractère C ".
3. L'événement : "Deux enfants ou plus présentent le caractère C ." est-il très improbable ?

Exercice 12 Une machine produit des pièces dont, en moyenne, 5 % sont défectueuses.

On prépare des lots en prélevant au hasard 10 pièces dans la production. Le nombre de pièces dans le stock est assez important pour que l'on puisse considérer le tirage comme étant avec remise.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses sur nos 10 pièces prélevées.

1. Montrer que la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer les probabilités des événements : " $X = 0$ ", " $X = 1$ ", " $X = 2$ ", et " $X \geq 3$ ".

Exercice 13 En France, il y a environ 12% de gauchers. On considère une classe de 30 élèves, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de gauchers dans cette classe.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser ses paramètres.
2. Combien d'élèves gauchers peut-on s'attendre à trouver dans la classe ?
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait un seul gaucher dans la classe.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait 2 gauchers ou plus dans la classe.

Exercice 14 Un homme se présente dans un village gaulois et se déclare devin.

Les habitants sceptiques se proposent de tester ses dons en lui demandant de deviner les résultats de 10 lancers d'une pièce équilibrée. Il donne 8 fois la bonne réponse.

1. On suppose que les réponses du devin sont données au hasard.
Calculer dans ce cas la probabilité qu'il donne 8 fois la bonne réponse.
2. Les habitants du village (experts bien en probabilité) seront-ils enclins à croire ce devin ?