Devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit f et g les fonction définies sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{4x+1}{x-2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{9}{x-2}$$

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
   Que remarque-t-on ?
2. Calculer $f(x) - g(x)$. Justifier alors la remarque précédente.

Exercice 2 On appelle f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
   En déduire que, pour tout réel positif x, $0 \leq \sqrt{x} \leq \dfrac{x+1}{2}$.

Exercice 3

1. On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^3 - 3x - 4$.
   a. Etudier les variations de f, et dresser son tableau de variation.
   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution a sur $[2;3]$.
      Donner un encadrement de a d'amplitude 10^{-2}.
   c. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = \dfrac{x^3+3x+2}{x^2}$.
   a. Calculer la dérivée g' de g et montrer que $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   b. En déduire les variations de g.

Exercice 4 On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+3}$, a et b désignant deux constantes réelles, et $\mathcal{C}$ la courbe de f.

1. Démontrer que la dérivée de f s'écrit $f'(x) = \dfrac{-ax^2-2bx+3a}{(x^2+3)^2}$.
2. Déterminer les valeurs de a et b pour que $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1;0)$ et admette en ce point une tangente de coefficient directeur $\dfrac{3}{2}$.

   Dans toute la suite, on prendra $f(x) = \dfrac{6x-6}{x^2+3}$.
3. Etudier les variations de f, et dresser son tableau de variation.
4. Donner une équation de la tangente T à la courbe de f en A.
5. Tracer T et $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unité 1 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée.

Exercice 5 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + x^2 + x + 1$, où a désigne un nombre réel non nul. Pour quelles valeurs de a, la fonction f est-elle croissante sur $\mathbb{R}$?