Devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ par l'expression $f(x) = \frac{x^2+3}{4x+1}$.

Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f (préciser les valeurs exactes des éventuels minimums et maximums).

Exercice 2 On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -x + 2$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 3 a désigne un nombre réel.
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + x^2 + x + 1$.

1. On suppose $a = 0$. Déterminer les variations de f.
2. On suppose maintenant $a \neq 0$.
   a) Pour tout nombre x, calculer $f'(x)$.
   b) Pour quelles valeurs de a, la fonction f est-elle croissante sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par l'expression $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A. *Etude d'une fonction auxiliaire.*
   On pose $g(x) = x^3 - 3x - 4$.
   1. Etudier le sens de variation de g.
   2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α, dans l'intervalle $[1; 3]$.
   3. Donner un encadrement de α à 0,1 près.
   4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

B. *Etude des variations de f.*
   Calculer $f'(x)$, et montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Prouver que la tangente à $\mathcal{C}$ au point M de d'abscisse a, a pour équation $y = 2(a+1)x - a^2 + 1$
2. Déterminer les équations réduites des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point $A(0; -1)$.