

I - Quantiles d'une série statistique

Définition On considère une série statistique d'effectif total N .

- La **médiane** est une valeur qui partage la série ordonnée en deux séries de même effectif.
 Si N est impair, $N = 2n + 1$, alors la médiane est la $n^{\text{ème}}$ valeur de la série ordonnée.
 Si N est pair, $N = 2n$, alors la médiane est la moyenne de la $n^{\text{ème}}$ et de la $(n + 1)^{\text{ème}}$ valeur.
- Le **premier quartile** Q_1 est une valeur de la série telle que 25 % des termes de la série lui sont inférieurs. Le **troisième quartile** Q_3 est une valeur de la série telle que 75 % des termes de la série lui sont inférieurs.
 Si N est un multiple de 4, $N = 4n$, alors Q_1 est la $n^{\text{ème}}$ valeur et Q_3 la $3n^{\text{ème}}$ valeur de la série ordonnée.
 Si N n'est pas un multiple de 4, Q_1 et Q_3 sont les valeurs de rang directement supérieur à $N/4$ et à $3N/4$.
 On appelle **interquartile** le nombre $Q_3 - Q_1$. C'est une caractéristique de dispersion de la série.
- Les **déciles** $D_1, D_2, D_3, \dots, D_9$ sont des valeurs de la série telles que 10 %, 20 %, 30 %, ..., 90 % des termes de la série lui sont inférieurs.

Exercice 1 Soit la série des notes des élèves d'une classe :

Elèves	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
Notes	15	10	12	8	10	18	12	8	8	15	10	8	6	18	12	8	12

On ordonne la série :

Notes x_i									
Nombre d'élèves n_i									
Effectifs cumulés croissants									

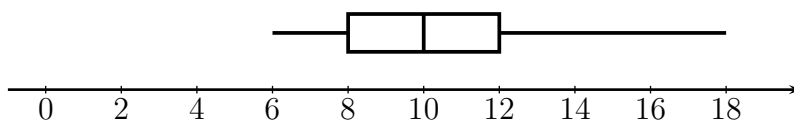
Effectif total de la série : $N = \dots$

Médiane de la série : $M_e = \dots$

Quartiles : $Q_1 = \dots$, $Q_3 = \dots$

Ecart inter-quartile :

Diagrammes en boîte (boîtes à moustaches) On représente ces grandeurs sous la forme suivante :



Exercice 2 On compare les températures moyennes (en ° C) de chaque mois de l'année pour deux communes de Haute-Savoie situées à 1000 m d'altitude : Chamonix et La Clusaz.

Mois	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chamonix	1,5	4	7,5	12	15,5	20	23	22	19	14	6,5	2
La Clusaz	2,5	3,5	6	9,5	14	17	20,5	20,0	17	13	7	3,5

Tracer les diagrammes en boîte de ces deux séries.

II - Moyenne, variance et écart-type

On considère une série statistique générale :

Valeur du caractère	x_1	x_2	x_3	\dots	x_p
Effectifs	n_1	n_2	n_3	\dots	n_p

d'effectif total : $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$.

Définition La moyenne de la série est : $\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{N} = \frac{\sum_{i=1}^p n_ix_i}{N}$

Exercice 3 Déterminer la moyenne des séries suivantes :

$$S_1 : 1; 8; 10; 10; 12; 19 \quad \bar{x} = \dots$$

$$S_2 : 9; 9,5; 10; 10,5; 11 \quad \bar{x} = \dots$$

$$S_3 : 10; 10; 10; 10; 10; \quad \bar{x} = \dots$$

$$S_4 : 10 \quad \bar{x} = \dots$$

Définition • La variance de la série est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

• L'écart-type d'une série est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{V}$.

Propriété

La variance est la moyenne des carrés des valeurs de la série moins le carré de la moyenne de la série :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_ix_i^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i(x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p (n_ix_i^2 - 2n_ix_i\bar{x} + n_i\bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_ix_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p 2n_ix_i\bar{x} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i\bar{x}^2 \\ &= \overline{x^2} - \frac{2\bar{x}}{N} \sum_{i=1}^p n_ix_i + \frac{\bar{x}^2}{N} \sum_{i=1}^p n_i \\ &= \overline{x^2} - \frac{2\bar{x}^2}{N} N\bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{N} N \\ &= \overline{x^2} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

Exercice 4 Le tableau suivant donne les tailles de 30 élèves d'une classe.

taille(cm)	145	146	151	152	155	160	165	170	172	176	180	186	188	190	193
effectif	1	1	1	2	3	3	5	2	6	3	3	2	1	1	1

Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.