

I - Définition

Définition Une suite u est une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

La suite u est donc un procédé qui à tout entier n associe le nombre $u(n)$.

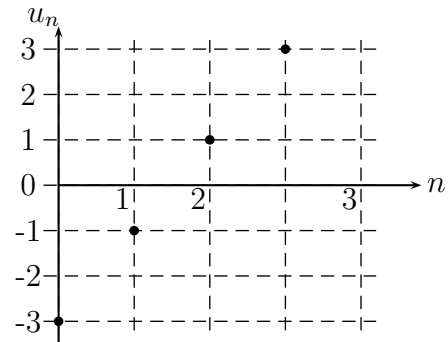
On note u_n en général le **terme d'indice** n au lieu de $u(n)$, tandis que la suite est notée (u_n) , ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au lieu de u .

Ex : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n - 3$, alors
 $u_0 = -3, u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = 3 \dots$

$u_{20} = \dots$

$u_{50} = \dots$

$u_{5250} = \dots$



Définition explicite d'une suite. Dans l'exemple précédent, le terme général u_n est l'image de l'entier n par une fonction usuelle :

$$u_n = f(n) \text{ où } f \text{ est la fonction affine } f : x \mapsto 3x - 2.$$

Autres exemples :

- $v_n = \frac{6n + 3}{n + 1}$; $v_n = f(n)$ avec la fonction rationnelle (homographique) $f : x \mapsto \frac{6x + 3}{x + 1}$

- $v_n = \frac{6n^2 + 2n - 3}{n + 5}$; $v_n = g(n)$ avec la fonction rationnelle $g : x \mapsto \frac{6x^2 + 2x - 3}{x + 5}$

- $w_n = 2^n$; $w_n = h(n)$ avec la fonction puissance $h : x \mapsto 2^x$

D'une manière générale, si f est une fonction définie au moins sur \mathbb{R}^+ , alors on peut définir une suite (u_n) en posant, pour tout entier n , $u_n = f(n)$.

Définition d'une suite par récurrence. On peut définir une suite en se donnant son premier terme u_0 et une relation qui permet de calculer un terme de la suite à partir de son prédécesseur : on connaît u_0 , à partir duquel on peut calculer u_1 , à partir duquel on peut calculer u_2, \dots

Ex : On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1,04 u_n \end{cases}$

Alors, $u_0 = 1000, u_1 = 1,04 \times u_0 = 1,04 \times 1000 = 1040, u_2 = 1,04 \times u_1 = 1,04 \times 1040 = 1081,6, u_3 = 1,04 \times u_2 = \dots \quad u_{50} = 1,04 u_{49} \dots$

Plus généralement, si f est une fonction définie sur \mathbb{R} , on peut définir par récurrence une suite par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Ex : Soit $f : x \mapsto 3x - 2$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ Calculer u_1, u_2 et u_{10} .

II - Sens de variation d'une suite

- Définition**
- Une suite (u_n) est **croissante** si pour tout entier naturel $n, u_{n+1} \leq u_n$.
 - Une suite (u_n) est **décroissante** si pour tout entier naturel $n, u_{n+1} \geq u_n$.
 - Une suite (u_n) est **constante** si pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = u_n$.
 - Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Remarque : Une suite peut n'être ni croissante ni décroissante, donc non monotone, par exemple la suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour laquelle $u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = -1, \dots$

Méthode pour l'étude du sens de variation d'une suite.

Etudier le sens de variation d'une suite (u_n) revient à comparer , **pour tout entier** n, u_{n+1} et u_n . Pour comparer ces termes, on peut soit étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$, soit comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exercice 1 Etudier le sens de variation des suites suivantes :

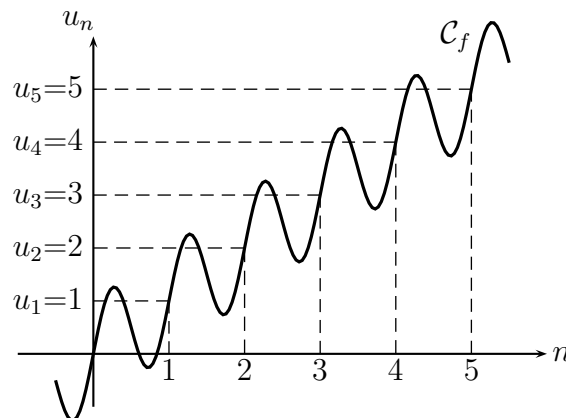
- Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = n^2 - n + 2$, alors, pour tout entier n ,
 $u_{n+1} - u_n = \dots$
- Soit la suite définie pour tout entier n par $u_n = \frac{2^n}{3^n}$, alors, pour tout entier n ,
 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \dots$
- $u_n = \frac{3n - 2}{n + 1}$ • $v_n = -\frac{1}{3}n + 3$ • (w_n) définie par $w_0 = 2$ et pour $n \geq 1, w_{n+1} = w_n - n$
- $x_n = (n - 5)^2$ $y_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ • $z_n = \frac{2^{n+2}}{3^n}$ • $\alpha_n = \frac{n^2 + 1}{2n}$

Propriété Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$, et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$, alors
 - si f est croissante, alors la suite (u_n) est croissante,
 - si f est décroissante, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : Si par exemple f est croissante sur \mathbb{R}^+ , alors pour tout entier $n, f(n + 1) > f(n)$, c'est-à-dire exactement que $u_{n+1} > u_n$, donc u_n est croissante.

Remarque : La réciproque est fausse.

Par exemple, soit la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ avec la fonction $f(x) = x + \sin(2\pi x)$. Alors, pour tout entier $n, u_n = n + \sin(2\pi n) = n$, et donc (u_n) est croissante (c'est la suite des entiers naturels), tandis que f n'est pas monotone sur \mathbb{R} .



Exercice 2 Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

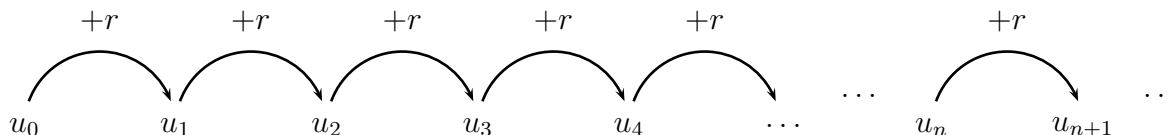
- $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n}$ • $v_n = \frac{3n - 1}{n + 2}$ • $w_n = n^2 - 10n + 26$ • $x_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n$

III - Suites particulières

1. Suites arithmétiques

Définition Une suite arithmétique est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité r , appelée **raison** de la suite, au terme précédent.

Pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$.



Exercice 3 • La suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 1$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$. On a : $u_1 = u_0 + 1 = 1$, $u_2 = u_1 + 1 = 2$, ...

(u_n) est la suite des entiers naturels.

- Soit (v_n) la suite définie par la relation $v_n = 5n + 2$.

Alors, pour tout entier n , $v_{n+1} - v_n = \dots$

On en déduit que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r \dots$

- La suite (w_n) définie par la relation $w_n = n^2 + 2$ est-elle arithmétique ?

Propriété Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , alors, pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$.

Démonstration : Par définition d'une suite arithmétique, $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$, et donc la propriété est vraie pour les deux premiers termes.

De plus, si on la suppose vraie pour un entier p quelconque : $u_p = u_0 + pr$, alors au rang suivant, $u_{p+1} = u_p + r = (u_0 + pr) + r = u_0 + (p + 1)r$: la propriété est encore vraie.

Ainsi la propriété s'étend, de proche en proche, à tous les entiers naturels, et donc, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.

Remarque : Cette technique de démonstration s'appelle une **démonstration par récurrence**.

Exercice 4 • Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 2$.

Calculer u_{3002} .

- Soit la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_2 = 1200$ et de raison $r = -10$. Calculer v_{25} . A partir de quel rang la suite est-elle négative ?

Propriété Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , alors, quels que soient les entiers m et p , $u_m - u_p = (m - p)r$.

Démonstration : D'après le théorème précédent, $u_m = u_0 + mr$ et $u_p = u_0 + pr$, d'où, en soustrayant ces deux égalités, $u_m - u_p = (m - p)r$.

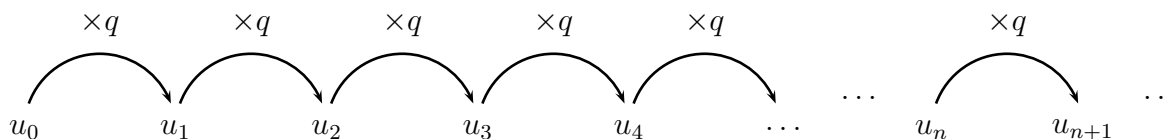
Exercice 5 Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_{10} = -70$ et $u_{25} = 80$.

Calculer la raison r de cette suite, puis calculer u_0 et u_{1212} .

2. Suites géométriques

Définition Une suite géométrique est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant par la même quantité q , appelée **raison** de la suite, le terme précédent.

Pour tout entier n , $u_{n+1} = q \times u_n$



Exercice 6 • La suite de nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... des puissances successives de 2 est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.

• la suite (v_n) de terme général $v_n = (-1)^n$, pour laquelle $v_0 = 1, v_1 = -1, v_2 = 1, v_3 = -1, \dots$ est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = -1$.

• Soit la suite (w_n) définie par la relation $w_n = 2 \times 3^n$.

Alors, pour tout entier n , $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \dots$

On en déduit que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \dots$

Propriété Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q , alors, pour tout entier n , $v_n = v_0 \times q^n$.

Démonstration : ...

Exercice 7 • Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 0.2$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.

Calculer u_4 et u_{20} .

Exercice 8 On utilise une feuille de papier, d'épaisseur $e = 0,5$ mm, que l'on replie successivement en deux.

Quelle est l'épaisseur de la feuille après le premier pliage ? après le deuxième ? après le $n^{\text{ème}}$?

Combien de fois faudrait-il replier cette feuille en deux pour obtenir une épaisseur supérieure à la hauteur de la tour Eiffel (environ 300 m) ?

Propriété Soit (u_n) une suite géométrique non nulle de raison $q \neq 0$, alors, quels que soient les entiers m et p , $\frac{u_m}{u_p} = q^{m-p}$.

Démonstration : D'après le théorème précédent, $u_m = u_0 \times q^m$, et $u_p = u_0 \times q^p$, et donc, en divisant terme à terme ces deux relations (car si $q \neq 0, u_p \neq 0$), $\frac{u_m}{u_p} = \frac{u_0 q^m}{u_0 q^p} = q^{m-p}$.

Exercice 9 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$.

On définit la suite (v_n) à partir de (u_n) par $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$.

- 1) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
- 2) Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

Exercice 10 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4u_n}{4 - u_n}$.

On définit la suite (v_n) à partir de la suite (u_n) par la relation $v_n = \frac{3u_n + 2}{u_n}$.

- 1) Montrer que (v_n) est arithmétique.
- 2) Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .

Exercice 11 (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} \end{cases}$, et (v_n) est définie par $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.

- 1) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3 et conjecturer la nature de la suite (v_n) .
- 2) Prouver que la suite (v_n) est géométrique.
- 3) Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .

IV - Sommes des termes d'une suite

Soit (u_n) une suite, on cherche à calculer la somme des termes $S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{q-1} + u_q$.

Cette somme contient : termes.

1. Suite arithmétique

Propriété La somme des n premiers entiers naturels est : $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration :

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\ S_n & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

La somme contient n termes, et donc on trouve ainsi, $2S_n = n(n+1)$, soit $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Propriété La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne des termes extrêmes :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_{q-1} + u_q = (q - p + 1) \frac{u_p + u_q}{2}$$

Démonstration : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , alors,

$S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{q-1} + u_q = u_p + (u_p + r) + (u_p + 2r) + \dots + (u_p + (q-1-p)r) + (u_p + (q-p)r)$
soit,

$$\begin{aligned}
S &= (p - q + 1)u_p + r \left[1 + 2 + \cdots + (q - 1 - p) + (q - p) \right] \\
&= (p - q + 1)u_p + r \frac{(q - p)(q - p + 1)}{2}, \text{ d'après la propriété précédente} \\
&= \frac{(q - p + 1)}{2} \left[2u_p + (q - p)r \right] = \frac{(q - p + 1)}{2} \left[u_p + \underbrace{u_p + (q - p)r}_{= u_q} \right]
\end{aligned}$$

2. Suite géométrique

Propriété Pour tout réel $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Pour $q = 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$.

Démonstration : Pour $q \neq 1$, $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, et donc, $qS = q + q^2 + \cdots + q^{n+1} = S - 1 + q^{n+1}$, d'où, $(q - 1)S = -1 + q^{n+1}$, et alors $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Propriété La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique, de premier terme a et de raison q est : $a \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Exercice 12 Calculer les sommes :

- $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$
- $P = 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 121$
- $Q = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$

Exercice 13 Résoudre les équations :

- 1) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^7 = 0$
- b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^8} = 0$
- c) $27x^7 + 9x^5 + 3x^3 + x = 0$

Exercice 14 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n + 4n - 3$.

On note (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = 3^n$ et $w_n = 4n - 3$.

- 1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et que (w_n) est une suite arithmétique
- 2) Calculer $V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $W_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.
- 3) En déduire la somme, en fonction de n , $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Exercice 15 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$.

- 1) a) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est géométrique.
b) Exprimer alors v_n en fonction de n .
- 2) a) Calculer en fonction de n la somme $S_n = 0,5 + (0,5)^2 + (0,5)^3 + \cdots + (0,5)^n$.
b) Exprimer alors u_n en fonction de n .

V - Convergence d'une suite

Etudier la convergence d'une suite (u_n) , c'est étudier le comportement des nombres u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$.

Ex : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n+1} + 3$.

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, la fraction rationnelle $\frac{1}{n+1}$ tend vers : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, et donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

On dit alors que la suite (u_n) **converge** vers 3, ce que l'on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 3$.

1. Suites définies par une fonction : $u_n = f(n)$

Propriété Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^+ , et (u_n) la suite définie pour tout entier n par la relation $u_n = f(n)$.

Si la fonction f admet une limite l en $+\infty$, alors la suite (u_n) admet pour limite l .

Exercice 16 Etudier la convergence des suites :

$$\bullet u_n = \frac{2n+1}{n+4} \quad \bullet v_n = 2n - 5 + \frac{n}{n^3+2} \quad \bullet w_n = \frac{n^3+3n-2}{n^5+6n^7+9}$$

Propriété Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers a et b , alors :

- la suite (s_n) définie par $w_n = u_n + v_n$ converge vers $a + b$,
- la suite (w_n) définie par $s_n = u_n \times v_n$ converge vers le réel $a \times b$,
- Si de plus $b \neq 0$, la suite (t_n) définie par $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{a}{b}$.

2. Encadrement d'une suite

Propriété Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites. Si à partir d'un certain rang n_0 on a : pour tout $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la **même** limite l , alors la suite (u_n) converge vers l .

Exercice 17 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2 + \frac{\sin n}{n}$.

Donner un encadrement de $\sin n$, puis de u_n . En déduire la limite de u_n .

Exercice 18 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{2n^2 - 3n \sin n}{n^2 + 1}$.

a) Donner une valeur approchée de u_{10} , u_{100} et u_{1000} .

Quelle conjecture peut-on faire concernant la limite de (u_n) ?

b) Prouver que, pour tout entier naturel non nul n , $\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$

c) En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 19 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \frac{1}{n + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

b) Combien de termes y-a-t-il dans la somme définissant u_n ? Quel est le plus grand de ces termes ? le plus petit ?

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{n}{n + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n + 1}$, puis la limite de la suite (u_n) .

Définition On dit qu'une suite (u_n) est bornée si il existe deux réels m et M tels que, pour tout entier n , $m \leq u_n \leq M$.

M est un majorant de (u_n) , m est un minorant de (u_n) .

Ex : • La suite (u_n) définie par $u_n = \sin n$ est bornée, car pour tout n , $-1 \leq u_n \leq 1$.
 (u_n) est majorée par 1 et est minorée par -1 .

• Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{3}{n+3}$.

Pour tout entier n , $n+3 \geq 3$, et donc, $\frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{3}$, d'où, $v_n \leq \frac{3}{3} = 1$.

De plus, pour tout entier n , $v_n \geq 0$.

Ainsi, pour tout entier n , $0 \leq v_n \leq 1$, et (v_n) est donc bornée.

Propriété Toute suite monotone et bornée est convergente.

Remarque : Cette propriété permet d'affirmer qu'une telle suite converge vers une certaine limite l , mais ne permet pas de la déterminer.

Ex : La suite (v_n) de l'exemple précédent, définie par $v_n = \frac{3}{n+3}$ est décroissante (le montrer!) et bornée. On sait donc qu'elle converge vers un réel l : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

3. Limite d'une suite géométrique

Propriété Soit u_n une suite géométrique de raison q , alors, pour tout n , $u_n = u_0 \times q^n$ et

• Si $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

• Si $q = 1$, pour tout n , $u_n = u_0$ (suite constante)

• Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si $u_0 > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si $u_0 < 0$.

Exercice 20 Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

• $u_n = (0,2)^n$ • $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ • $u_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ • $u_n = \frac{1}{3^n} + \frac{n}{n+1}$

Exercice 21 (u_n) est une suite définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n + 5$.

(v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 4$.

- Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3 . Que peut-on conjecturer concernant cette suite?
- Prouver que la suite (v_n) est géométrique.
- Exprimer v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .
- a) Prouver que si n est pair v_n est négatif, et que si n est impair v_n est positif.
 b) (u_n) est-elle monotone?
- Déterminer la limite de (v_n) , puis celle de (u_n) .

Exercice 22 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0, u_1 = 10$ et, pour tout n , $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

On note (v_n) la suite telle que, pour tout entier n , $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- Quelle relation lie v_{n+1} et v_n ? En déduire que (v_n) est géométrique, et exprimer v_n en fonction de n .
- Démontrer que $u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1})$.
 En déduire u_n en fonction de n .
 La suite (u_n) est-elle convergente?