Probabilités

I Statistique : tableaux à double entrée - arbre pondéré

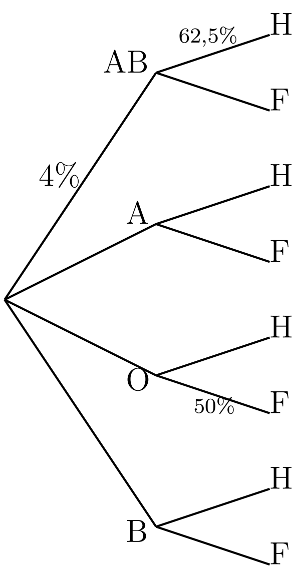
Ex 1. On donne la répartition des individus constituant un échantillon d'une population suivant deux critères qualitatifs : le sexe et le groupe sanguin.

groupe \ sexe	masculin	féminin	total
AB	25	15	
A	250	200	
O	200	200	
B	60	50	
total			

1) Quel est le pourcentage d'hommes du groupe O dans l'échantillon ?

2) Quel est le pourcentage de femmes du groupe AB dans l'échantillon ?

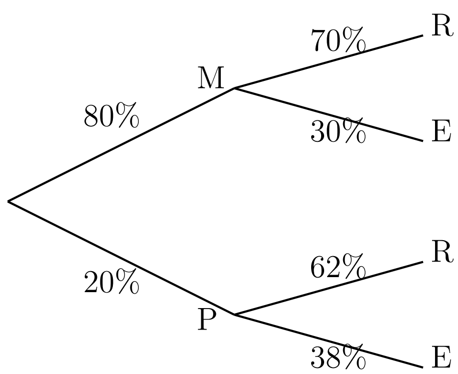
3) Compléter l'arbre ci-dessous en indiquant les pourcentages correspondant à chaque branches.



4) Quel est le pourcentage d'hommes du groupe AB ? Le pourcentage de femmes du groupe A ?

5) Parmi les personnes du groupe B, quel est le pourcentage d'hommes ? de femmes ?

Ex 2. L'arbre ci-dessous donne la répartition des réussites (R) et des échecs (E) au permis de conduire des moins de 25 ans (M) et plus de 25 ans (P) dans une auto-école.



Compléter le tableau à double entrée suivant :

	M	P	total
R			
E			
total			500

II Probabilités

Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard.

Henri Poincaré

On connaît la frayeur de ce malade qui, sur le point de subir une intervention chirurgicale, demande :
- Docteur, combien a-t-on de chances de se tirer de là ?
- 99 pour cent.
- Et vous avez déjà réussi beaucoup d'opérations comme celle-là ?
- 99.

Jean-Louis Boursin, Les structures du hasard. Les probabilités et leurs usages

Tout est prévu, tout est réglé : notre ignorance seule seule nous porte à croire que tout est abandonné au hasard.

Adolphe Quételet

1 Vocabulaire des probabilités

Définitions:
- *Une* **expérience** *est dite* **aléatoire** *lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats) possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.*
- *On appelle univers, noté en général Ω, l'ensemble des issues ou résultats possibles d'une expérience aléatoire.*
- *Un* **événement** *est une partie de l'univers, c'est-à-dire un ensemble de résultats possibles.*
- *Un* **évènement élémentaire** *est un évènement qui ne contient qu'un seul élément.*

Ex 3. On lance un dé à six faces et on s'intéresse au nombre obtenu sur la face supérieure.

Les résultats possibles sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

L'univers est l'ensemble des six résultats : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

"Obtenir un 6", "Obtenir un nombre pair", et "Obtenir un nombre supérieur ou égal à 4" sont des événements qui peuvent s'écrire $E_1 = \{6\}$, $E_2 = \{2, 4, 6\}$ et $E_3 = \{4, 5, 6\}$.

E_1 est de plus un événement élémentaire.

Ex 4. On tire une carte "au hasard" dans un jeu de 32 cartes.

L'univers est constitué de 32 événements élémentaires.

L'événement : E="Tirer un roi" est-il un événement élémentaire ?

Définitions:
- *On appelle* **événement contraire** *de l'événement A, l'événement noté $\overline{A}$ contenant tous les éléments de l'univers Ω ne se trouvant pas dans A.*
- *On appelle* **réunion** *de A et B, l'événement noté $A \cup B$ contenant tous les éléments de A et tous ceux de B.*
- *On appelle* **intersection** *de A et B, l'événement noté $A \cap B$ contenant les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.*
- *Deux événements sont dits* **incompatibles** *lorsque leur intersection est vide, c'est-à-dire lorsqu'ils ne peuvent être réalisés simultanément.*

Ex 5. Dans le cas du lancer de dé, si A est l'événement : "Obtenir un nombre impair", c'est-à-dire $A = \{1, 3, 5\}$, alors son événement contraire est $\overline{A} = \dots$

Soit E l'événement "Obtenir un 3 ou un 5", c'est-à-dire si $E = \{3, 5\}$, alors

$\overline{E} = \dots$ $\qquad$ $A \cup E = \dots$ $\qquad$ $A \cap E = \dots$

Ex 6. Dans un jeu de 32 cartes, on considère les événements : A="tirer un cœur", B="tirer un dix" et C="tirer une figure". Décrire les événements : $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$.

Ex 7. A l'oral du bac, un examinateur interroge le candidat au hasard sur l'un des trois thèmes : statistiques, probabilités, fonctions.

On désigne par S l'évènement *"le candidat est interrogé sur les statistiques", et par P l'évènement "le candidat est interrogé sur les probabilités".*

1. *Quel est l'évènement $S \cap P$?*
   Que peut-on dire des évènements S et P ?
2. *Décrire par une phrase l'évènement $S \cup P$, puis son évènement contraire $\overline{S \cup P}$.*

Ex 8. J'achète trois billets de tombola.

1. Quel est le contraire de l'évènement *"tous mes billets sont gagnants"* ?
2. Quel est le contraire de l'évènement *"aucun de mes billets n'est gagnant"* ?

Ex 9. A la sortie du théâtre, on demande à une personne adulte choisie au hasard si elle aaimé la pièce. Elle doit répondre par oui ou par non.

On considère les évènements :
H :"la personne est un homme"
O :"la personne répond oui"
Décrire par une phrase les évènements : $H \cap O$; $H \cup O$; $\overline{H}$; $\overline{O}$; $\overline{H} \cap \overline{O}$; $\overline{H} \cup \overline{O}$; $\overline{H \cap O}$ et $\overline{H \cup O}$.

2 Probabilité d'un événement

2.1 Définition

Définition: *La* **probabilité d'un événement** *est un nombre qui mesure les "chances" que cet événement a de se produire sur une échelle de 0 (événement impossible) à 1 (événement certain).*
Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

Définition: *Soit $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ l'univers des possibilités d'une épreuve aléatoire, où chaque e_i désigne une issue (ou évènement élémentaire.*

Définir une **loi de probabilité** *sur l'univers Ω c'est associer à chaque issue e_i un nombre réel p_i tel que : $0 \leq p_i \leq 1$ et $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.*

Le nombre p_i est la **probabilité** *de l'évènement e_i.*

Propriété: **Loi des grands nombres**
Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences obtenues sur des séries de taille n se rapprochent de P quand n devient grand.

Sur n=100 expériences de lancer d'un dé non pipé, on a obtenu 18 fois le chiffre 6 ; sur n=1000 lancers on a obtenu 169 fois le chiffre 6.

Lorsqu'on augmente le nombre n d'expérience réalisées, la fréquence d'apparition du chiffre 6 tend vers la probabilité qui est de $\dfrac{1}{6}$.

2.2 Calcul de probabilité

Définition: *On dit qu'il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.*

Ex : Dans le cas du lancer de dé, l'univers est composé exactement des six événements élémentaires : $e_1 = \{1\}$, $e_2 = \{2\}$, $e_3 = \{3\}$, $e_4 = \{4\}$, $e_5 = \{5\}$, $e_6 = \{6\}$.

Si le dé n'est pas truqué, chaque événement a la même probabilité p :
$p = P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = P(e_4) = P(e_5) = P(e_6)$.

Comme par ailleurs $P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + P(e_4) + P(e_5) + P(e_6) = 6p = 1$, on a donc
$p = P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = P(e_4) = P(e_5) = P(e_6) = \dfrac{1}{6}$.

Propriété: *La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires composant A.*

Ex : Dans l'expérience de lancer de dé, on considère l'événement A="obtenir un nombre pair". Alors $A = \{2, 4, 6\}$ et A est constitué des événements élémentaires $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$.

La probabilité de A est donc : $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$

Propriété: *Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :*

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

Ex 10. Une personnes pressée répond à un sondage. Deux questions sont posées et, à chacune, on donne le choix entre *"favorable"* , *"opposé"* et *"sans opinion"*.

De combien de façons la personne peut-elle répondre au sondage ?

Ex 11. Dans une interrogation écrite, la consigne est la suivante : *"Pour chacune des quatre affirmations, répondre par Vrai ou Faux"*.

Un élève qui ne sait pas sa leçon, décide de cocher une case au hasard pour chaque affirmation.

De combien de façons peut-il remplir sa feuille ?

Sachant qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte à chaque affirmation, quelle probabilité a-t-il de faire tout juste ?

Ex 12. A la rentrée, dans une classe de 28 élèves, le professeur principal désigne au hasard un couple d'élèves pour être délégués provisoires.

Combien y-a-t-il de couples différents possibles ?

Il y a dans cette 13 filles et 15 garçons. Le professeur doit en fait désigner un couple garçon - fille. Combien y-a-t-il de couples différents possibles ?

Ex 13. Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. On considère les évènements A : *"tirer un roi"* et B : *"tirer un cœur"*.

a) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

b) Quels sont les évènements élémentaires qui composent l'évènement A ? l'évènemennt B ?
En déduire les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.

c) Décrire par une phrase les évènements $A \cup B$ et $A \cap B$.
Donner alors les probabilités $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B)$.

Ex 14. On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 deux fois successivement, puis on ajoute les chiffres obtenus aux deux lancés.

1. Faire un arbre représentant tous les évènements possibles (1$^{\text{er}}$ lancé et 2$^{\text{ème}}$ lancé).
   a) Combien y-a-t-il d'issues possibles ?
   b) Combien de façons a-t-on d'obtenir la somme 4 ? la somme 7 ?

c) En déduire les probabilités $P(4)$ et $P(13)$.

Ex 15. *Mot de passe*

Un mot de passe est constitué de 8 caractères suivant :
- les 2 premiers caractères sont des chiffres ;
- les 6 caractères suivants sont des lettres de l'alphabet.

1. Combien de mots de passe différents est-il possible de constituer ?
2. Quelle est la probabilité de trouver au hasard le mot de passe d'une personne ?
3. Un système informatique permet de tester, l'un après l'autre, l'ensemble des mots de passe. Il faut $0,1$ seconde pour tester un mot de passe.
   Combien de temps faudra-t'il pour tester l'ensemble des mots de passe possible ?

Ex 16. Deux grossistes produisent des bulbes de tulipes :
- le premier : des bulbes à fleurs rouges, dont 90% donnent une fleur ;
- le deuxième : des bulbes à fleurs jaunes, dont 80% donnent une fleur ;

Un horticulteur achète 70% des bulbes qu'il cultive au premier grossiste et le reste au second. Il plante un bulbe au hasard ; quelle est la probabilité :

1. d'obtenir une fleur rouge ?
2. d'obenir une fleur jaune ?
3. de ne pas obtenir de fleur ?

Ex 17. *Météo probabiliste simplifiée*

Un modèle simplifié de l'évolution des conditions météorologiques consiste à classer le temps en 3 catégories : "Beau", "Variable" et "Mauvais".

Le tableau suivant fournit la probabilité d'avoir un temps donné le lendemain en fonction du temps du jour même.

2ème jour / 1er jour	Beau	Variable	Mauvais
Beau	0,6	0,3	0,1
Variable	0,3	0,4	0,3
Mauvais	0,1	0,3	0,6

Nous somme lundi et il fait beau. Quelle est la probabilité pour qu'il fasse beau :

1. mardi ?
2. mercredi ?
3. mardi ou mercredi ?
4. de mardi à dimanche prochain ?

III Propriétés des probabilités

1 Probabilité de la réunion de deux évènements

Dans le cas général où les évènements A et B ont des issues en communs (dans le cas $A \cap B \neq \emptyset$, c'est-à-dire encore si A et B ne sont pas incompatibles), dans la somme $P(A) + P(B)$ on compte deux fois les probabilités des issues communes à A et à B, c'est à dire des issues de $A \cap B$, donc,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Dans le cas particulier où les évènements A et B sont incompatibles, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cap B) = 0$, et donc, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ex 18. Dans un groupe de 20 personnes, 10 personnes s'intéressent à la pêche, 8 à la lecture et 5 ne s'intéressent ni à la pêche ni à la lecture.

On désigne une personne de ce groupe au hasard.

On note A l'événement "la personne désignée s'intéresse à la pêche" et B l'événement : "la personne désignée s'intéresse à la lecture".

1. Traduire l'énoncé en termes de probabilités et compléter le tableau :

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			1

2. Déterminer la probabilité pour qu'elle s'intéresse :
   a) à l'une au moins des deux activités
   b) aux deux activités.

2 Probabilité de l'évènement contraire

Les évènements contraires A et $\overline{A}$ sont incompatibles : $A \cap \overline{A} = \emptyset$. D'après la formule précédente, on a alors, $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.

De plus, toutes les évènements possibles sont dans A ou son contraire $\overline{A}$, c'est-à-dire que $A \cup \overline{A} = 1$, et ainsi, $P(A \cup \overline{A}) = 1$.

Finalement, l'évènement contraire $\overline{A}$ de l'évènement A a pour probabilité $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.

Ex 19. On donne les probabilités de deux évènements A et B : $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,1$.

1. Compléter le tableau :

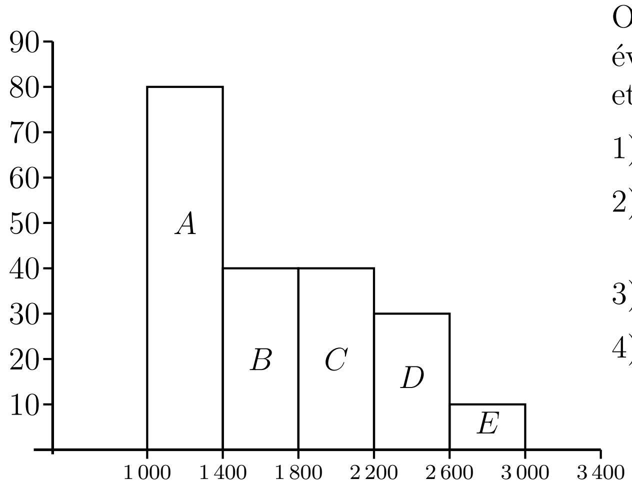
	B	$\overline{B}$	Total
A	$0,1$		$0,5$
$\overline{A}$			
Total	$0,4$		

2. Quelle est la probabilité de $\overline{A} \cap \overline{B}$?
3. Quelle est la probabilité de $\overline{A} \cup \overline{B}$?

Ex 20. *Vrai ou faux*

a) Si A et B sont contraires alors $P(A \cap B) = 0$.
b) Si A et B sont incompatibles alors $p(A) = 1 - P(B)$.
c) Si A et B sont contraires alors $P(A) + P(B) = 1$.
d) Si $P(A \cup B) = 1$, alors A et B sont contraires.
e) Si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, alors A et B sont contraires.
f) Si A et B sont incompatibles alors $P(A) + P(B) \leq 1$.

Ex 21. Le graphique suivant donne la répartition des salaires dans une entreprise. On dénombre cinq classes de salaires différentes.



On rencontre un salarié au hasard. On considère les évènements : A : "Le salarié appartient à la classe A", et B : "Le salarié appartient à la classe B".

1) Déterminer $P(A)$ et $P(B)$.

2) Définir chacun des évènements $A \cup B$ et $\overline{A}$ par une phrase sur le salaire mensuel.

3) Déterminer $P(A \cup B)$ et $P(\overline{A})$.

4) On sait que le salarié rencontré a un salaire, en euros, appartenant à $[1\,800\,;2\,600]$. Déterminer la probabilité pour que ce salarié appartienne à la classe C.

Exercice Dans une station balnéaire on a interrogé 600 touristes, français ou étrangers, sur leur séjour. Tous ont répondu être soit au camping, soit à l'hôtel, soit en location, avec, plus précisément :

- 10 % des touristes sont logés à l'hôtel,
- 40 % des touristes étrangers sont au camping,
- 40 % des touristes étrangers ont choisi une location,
- il y a deux fois plus de touristes français en camping qu'en location.

1. a) Sachant que 48 touristes étrangers sont à l'hôtel, montrer que le nombre de touristes étrangers est 240. En déduire le nombre de touristes français interrogés.

   b) Montrer que le nombre de touristes français en location est 116.

   c) Montrer que le nombre de touristes en camping est 328.

   d) Compléter le tableau :

	Camping	Location	Hôtel	Total
Français				
Etrangers			48	
Total				600

2. Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme décimale, à 10^{-2} près.
On choisit au hasard une personne parmi les 600 interrogées et on suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.
On considère les événements :
   - A : "La personne interrogée est un touriste étranger".
   - B : "La personne interrogée séjourne dans un camping".

   a) Calculer les probabilités $p(A)$ et $p(B)$ des événements A et B.

   b) On considère l'événement C : "La personne interrogée est un touriste étranger et séjourne dans un camping".
   Exprimer l'événement C à l'aide des événements A et B, et calculer la probabilité $p(C)$ de l'événement.

   c) Calculer la probabilité $p(A \cup B)$ de l'événement $A \cup B$.

   d) On sait que la personne interrogée est en location. Calculer la probabilité qu'elle soit un touriste français.

Exercice Dans une classe, il y a 15 garçons et 20 filles.

10 élèves sont externes, dont 5 garçons, et 25 sont demi-pensionnaires.

1. Compléter le tableau suivant :

	Garçons	Filles	Total
Externes			
Demi-pensionnaires			
Total			

2. On interroge un élève au hasard : quelle est la probabilité pour qu'il soit externe ?
3. On interroge un garçon au hasard : quelle est la probabilité pour qu'il soit demi-pensionnaire ?

Exercice On lance deux dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 6. On note alors le plus grand des deux numéros sortis.

1. Décrire la situation à l'aide d'un arbre.
2. Quel est l'univers Ω de toutes les issues possibles ?
3. Déterminer la probabilité de chaque issue.

Exercice Les maires de Loti-sur-Mer et de Prés-les-bains ont consulté leurs 1550 administrés sur la fusion des deux communes.

- 60 % des personnes interrogées habitent à Loti-sur-mer ;
- 35 % des habitants de prés-les-bains sont favorables à cette fusion ;
- 10 % des personnes interrogées n'ont pas souhaité répondre, tandis que les habitants de Prés-les-bains à ne pas avoir répondu représentent seulement 2 % des personnes interrogées ;
- 42 % des personnes interrogées sont opposées au projet ;

1. Compléter le tableau :

	Favorables	Opposés	Non répondu	Total
Loti-sur-Mer				
Prés-les-bains				
Total				1550

On rencontre au hasard l'une des personnes consultées.

2. Calculer la probabilité des événements suivants :
N : "La personne n'a pas répondu"
F : "La personne a répondu favorablement"
L : "La personne est de Loti-sur-Mer"

3. Calculer la probabilité que la personne n'ai pas répondu ou ait répondu favorablement.

4. Décrire par une phrase les événements $F \cap L$ et $F \cup L$, puis calculer leur probabilité.

Exercice **Epidémie de grippe**

Dans un lycée de 1470 élèves, 350 élèves se font vacciner contre la grippe au début de l'année scolaire.

Une épidémie de grippe a affecté la population scolaire, et on a constaté que 10 % des élèves ont contracté la maladie.

On a aussi noté que 4 % des élèves vaccinés ont eu la grippe.

1. Compléter le tableau :

	Elèves vaccinés	Elèves non vaccinés	Total
Elèves ayant eu la grippe			
Elèves n'ayant pas eu la grippe			
Total	350		1470

Dans la suite, on arrondira les résultats à 0,01 près.

2. On choisit au hasard un des élèves de ce lycée.
   a) Calculer la probabilité des événements :
   A : "l'élève a été vacciné"
   B : "l'élève a eu la grippe"
   b) Calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$.
   c) On choisit un élève au hasard parmi ceux qui ont été vaccinée.
   Quelle est la probabilité qu'il ait la grippe ?
   Comparer cette probabilité avec celle d'avoir la grippe en n'ayant pas été vacciné.

Exercice Un établissement scolaire compte 130 élèves en terminale STG. Ces élèves sont répartis en 3 spécialités : CGRH, mercatique et CFE.

50 % des élèves sont en mercatique et 45 d'entre eux sont des garçons.

30 élèves sont en CFE et dans cette spécialité, il y a autant de filles que de garçons.

En CGRH, il y a 6 fois plus de filles que de garçons.

1. Compléter le tableau :

	CGRH	Mercatique	CFE	Total
Filles				
Garçons				
Total				

2. Un élève est choisi au hasard parmi les 130 élèves de terminale STG.
   On considère les événements suivants :
   M : "l'élève choisi est en mercatique"
   F : "l'élève choisi est une fille"
   H : "l'élève choisi est en CGRH"

   a) Calculer $p(M)$ et $p(H)$.
   b) Décrire l'événement $\overline{M}$ et calculer sa probabilité.
   c) Décrire l'événement $M \cap F$ et calculer sa probabilité.
   d) Décrire l'événement $M \cup F$ et calculer sa probabilité.
   e) On voit que l'élève choisie est une fille. Déterminer alors la probabilité de l'événement M.
   f) On sait que l'élève choisi est en mercatique. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Exercice Il y a 14 chevaux au départ d'une course. On cherche le "tiercé", c'est-à-dire les 3 chevaux qui arriveront, dans cet ordre, 1er, 2ème et 3ème.

Un spécialiste des courses a éliminé 10 chevaux qui, d'après lui, n'ont aucune chance de gagner. Il en reste donc 4, qui ont tous la même probabilité, a priori, de gagner.

1. On désigne par A, B, C et D les quatre chevaux.
   Dresser un arbre décrivant tous les tiercés possibles.
   Combien de tiercé peut-on former avec 4 chevaux ?
2. On admet que, a priori, tous les tiercés possibles sont équiprobables.
   a) Quelle est la probabilité de trouver le tiercé gagnant ?
   b) Déterminer la probabilité de l'événement "A, B, et D sont les 3 chevaux constituant le tiercé" (pas forcément dans cet ordre).
   c) Déterminer la probabilité de l'événement F : "A et C sont dans le tiercé gagnant" (pas forcément dans cet ordre).