Droites - Systèmes

Exercice 1

1) On considère l'équation $(\mathcal{D}) : y = 3x + 1$.

   a) Parmi les couples suivants, indiquer ceux qui sont solutions de l'équation $(\mathcal{D})$:

$$(1\ ;\ 2)\ ,\ (1\ ;\ 4)\ ,\ (-2\ ;\ -5)\ ,\ (1,25\ ;\ 2,5)\ ,\ (0,5\ ;\ 2,5)\ ,\ (-2,5\ ;\ -4,5)\ ,\ (2,1\ ;\ 7,3)$$

   b) On note respectivement A, B, C, D, E, F, G les points dont les coordonnées sont les couples précédents.
   Placer dans un repère ces points.

   c) Quelle est la nature de l'ensemble $(\mathcal{D})$?

   d) Déterminer trois autres couples solutions de l'équation $(\mathcal{D})$.

Exercice 2

1) On considère l'équation $(E) : 3x - 2y = 4$.

   a) Parmi les couples suivants, indiquer ceux qui sont solutions de l'équation (E) :

$$(1\ ;\ 1)\ ,\ (0\ ;\ -2)\ ;\ (\frac{2}{3}\ ;\ 1)\ ;\ (1,5\ ;\ 0,25)$$

   b) Déterminer deux autres couples solutions de cette équation.

   c) Montrer que l'équation (E) est en fait celle d'une droite (d).
   Tracer cette droite dans un repère.

Exercice 3

1) On considère le système : $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{array}\right.$.

   a) En interprétant graphiquement chacune des équations, justifier que le système admet une unique solution.
   Préciser cette solution.

2) On considère le système : $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ 1,5x - y = 3 \end{array}\right.$.

   Ce système admet-il une solution ? (on pourra interpréter et représenter graphiquement chacune des deux équations)

I - Equations de droites

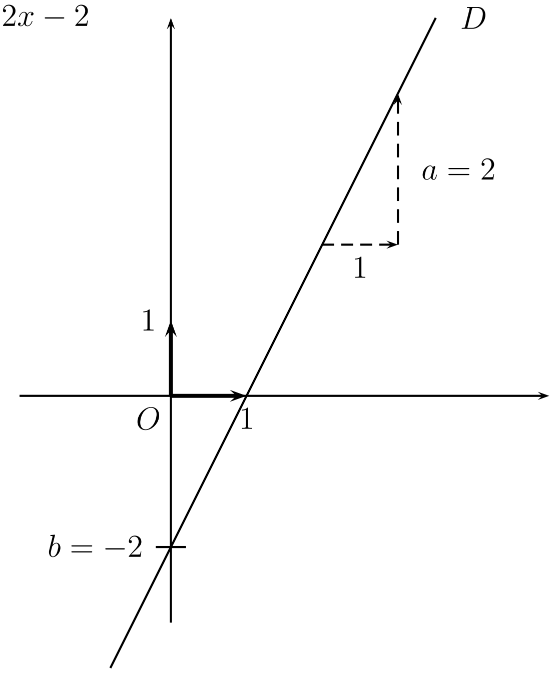
Propriété *Toute droite $\mathcal{D}$, non parallèle à l'axe des ordonnées, admet une équation de la forme $y = ax + b$.*

Cette équation est appelée équation réduite de $\mathcal{D}$; a est le coefficient directeur de la droite, et b son ordonnée à l'origine.

Ex : $(\mathcal{D}) : y = 3x + 1$ $\quad (\Delta) : y = -5x + 2$

Remarque : Toute droite d'équation $y = ax + b$ est la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = ax + b$.

Ex. $(D) : y = 2x - 2$



Remarque : Toute droite (D) admet une équation générale de la forme : $ax + by = c$.

Ex : Ecrire chacune des équations de droite suivantes sous forme réduite.

- $(D) : 3x - y = -1$
- $(\Delta) : 5x + y = 2$
- $(T) : y = 3$
- $(T') : x = 1$

Propriété *Le point $A(x_A; y_A)$ appartient à la droite $(\mathcal{D}) : y = ax + b$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite :*

$$A(x_A; y_A) \in (\mathcal{D}) \quad \textit{si et seulement si} \quad y_A = ax_A + b$$

Ex : Déterminer l'équation de la droite (D) passant par les points $A(-2; 3)$ et $B(2; 0)$.

Ex : Déterminer le coefficient directeur de la droite (D) passant par les points $A(2; 8)$ et $B(-2; 0)$.

Cas général : La droite (D) passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ a pour équation réduite $(D) : y = ax + b$.

Or, $A(x_A; y_A) \in (D)$ et donc $y_A = ax_A + b$. De même $B(x_B; y_B) \in (D)$ et donc $y_B = ax_B + b$.

En résumé, les coefficients a et b vérifient le système : $\left\{\begin{array}{rcrcr} y_A & = & a\,x_A & + & b \\ y_B & = & a\,x_B & + & b \end{array}\right.$

En soustrayant ces deux équations, on obtient : $y_A - y_B = a\,x_A - a\,x_B = a(x_A - x_B)$,

d'où, $a = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

Propriété *Le coefficient directeur de la droite $(\mathcal{D})$ passant par les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, si $x_A \neq x_B$, est*

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ex : Déterminer l'équation de la droite (D) passant par $A(-1;3)$ et $B(3;-5)$.

Propriété *Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.*

Ex : Déterminer, parmi les droites suivantes, celles qui sont parallèles :

- $(D_1) : y = 3x - 2$ • $(D_2) : y = 3x + 125$ • $(D_3) : 6x - 2y = -7$ • $(D_4) : 18x + 3y = 2$

II - Systèmes d'équations linéaires

Ex : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 5 \\ -x & + & 4y & = & -6 \end{array}\right.$ est un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y.

Le couple $(2;-1)$ est solution de ce système car :

$$3 \times (2) + (-1) = 6 - 1 = 5 \quad \underline{\underline{\text{et}}} \quad -(2) + 4 \times (-1) = -2 - 4 = -6$$

Ex : Représenter graphiquement les droites $(D) : 2x + 2y = 4$ et $(D') : -x - 2y = -5$.

En déduire les solutions du sytème $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 2y & = & 4 \\ -x & - & 2y & = & -5 \end{array}\right.$

Propriété *Les solutions d'un système d'équations linéaires à deux inconnues sont les couples de coordonnées des points d'intersection de ces droites.*

Ex : Quel est le nombre de solution des systèmes suivants :

- $(\mathcal{S}_1)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 3 \\ -4x & + & 2y & = & 0 \end{array}\right.$ • $(\mathcal{S}_2)\left\{\begin{array}{rcrcr} -12x & + & 4y & = & 8 \\ 3x & - & y & = & -2 \end{array}\right.$ • $(\mathcal{S}_3)\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & y & = & 10 \\ -8x & + & 2y & = & -4 \end{array}\right.$

Ex : Résoudre les systèmes suivants :

- $(\mathcal{S}_1)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 7 \\ x & + & 5y & = & -3 \end{array}\right.$ • $(\mathcal{S}_2)\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 4y & = & 32 \\ 7x & + & 6y & = & 58 \end{array}\right.$ • $(\mathcal{S}_3)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & 10 \\ 3x & + & 5y & = & 18 \end{array}\right.$

- $(\mathcal{S}_4)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 4y & = & 4 \\ x & - & 3y & = & 6 \end{array}\right.$ • $(\mathcal{S}_5)\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 5y & = & 3 \\ 7x & + & 5y & = & 17 \end{array}\right.$ • $(\mathcal{S}_6)\left\{\begin{array}{rcrcr} \dfrac{x}{5} & - & \dfrac{y}{2} & = & 1 \\ -2x & + & \dfrac{y}{4} & = & 11 \end{array}\right.$

Exercice 4 J'ai acheté 2 CD et 1 DVD pour 44 euros. Le lendemain, dans le même magazin, j'ai acheté 3 CD et 2 DVD pour 75 euros.

Combien coûtent 1 CD et 1 DVD.

Exercice 5 Un particulier veut tapisser son salon. Il choisit deux sortes de papier : du papier imprimé et du papier uni. Il a besoin au total de 9 rouleaux de papier.

On lui annonce que s'il fait le choix de 3 rouleaux de papier imprimé et 6 rouleaux de papier uni, le coût s'élève à 600 euros, tandis que pour 4 rouleaux imprimés et 5 rouleaux unis, le coût est de 632 euros.

Quel est le prix d'un rouleau imprimé ? d'un rouleau uni ?

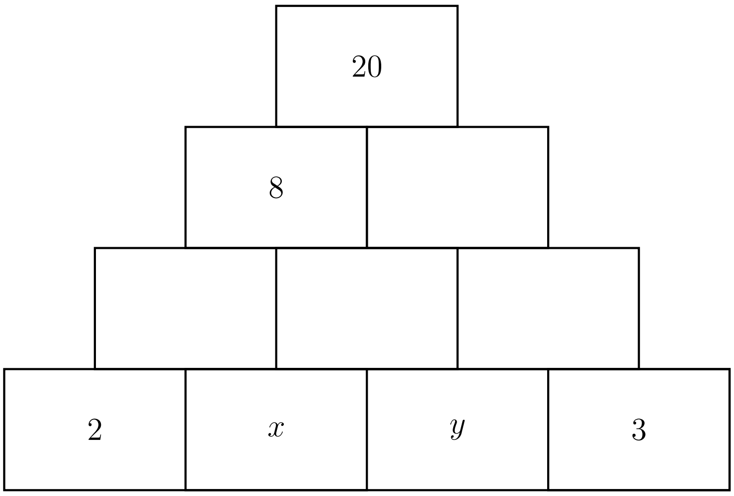
Exercice 6 Une somme de 2850 euros est payée avec 37 billets de 100 euros et de 50 euros.

Combien y avait-il de billets de chaque sorte ?

Exercice 7 Résoudre les systèmes :

• $(\mathcal{S}_4)\left\{\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 3y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 3 \end{array}\right.$ • $(\mathcal{S}_5)\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -17 \\ -x & + & 9y & = & 46 \end{array}\right.$ • $(\mathcal{S}_6)\left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 3y & = & 11 \\ 3x & + & 4 & = & 2y \end{array}\right.$

Exercice 8 Dans cette pyramide, une brique est égale à la somme des deux briques qui la soutiennent.



Déterminer les valeurs de x, y, et des autres briques.