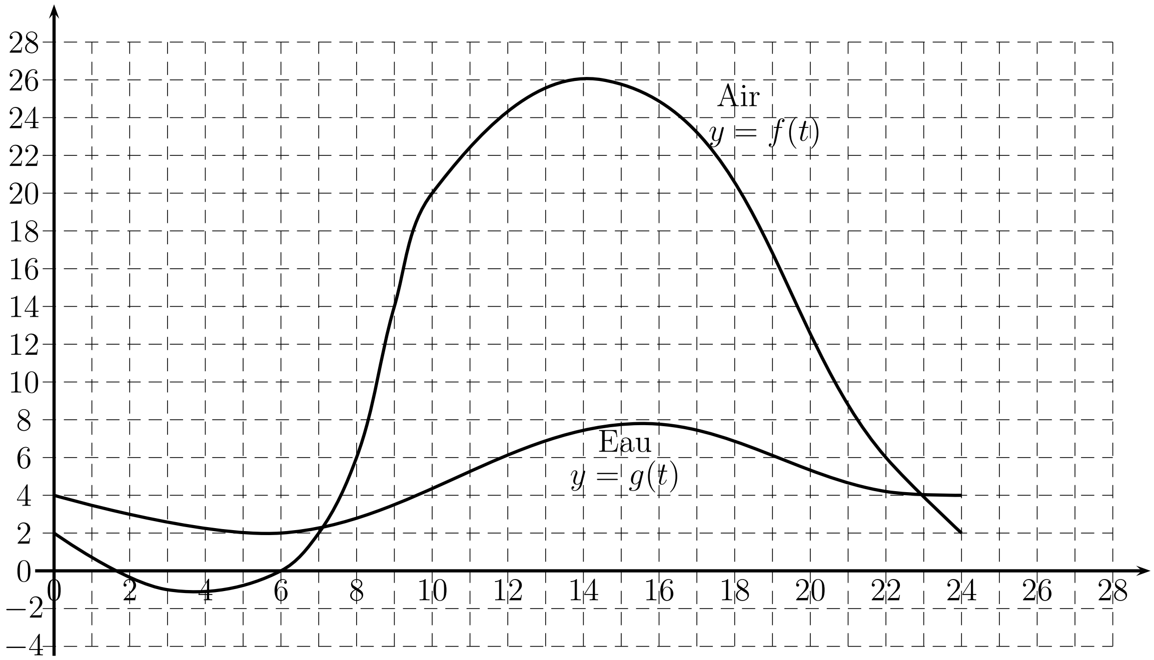
Fonctions

$1^{\text{ère}}$ *STMG*

1 - Relevé de températures : courbes et fonctions Voici les relevés des températures de l'eau et de l'air, au bord d'un lac de montagne, pendant 24 heures.



On désigne respectivement par f et par g les fonctions mesurant la température en degré Celsius de l'air et de l'eau, en fonction du temps exprimé en heurs et désigné par la variable t.

1. Traduire en langage courant les phrases suivantes :

	Langage mathématique	Langage courant
a.	$f(17) = 24$	A 17 h, la température de l'air était de 24° C.
b.	L'image de 6 par g est 2.	A 6 h, la température ...
c.	Quels sont les antécédents de 14 par la fonction f ?	A quelle heure ... ?
d.	Le maximum de la fonction f est 26	
e.	Si $1 < t < 6$, alors $f(t) < 0$.	Entre 1 h et 6 h ...
f.	$f(7) = g(7)$	A 7 h, ...
g.	Résoudre $f(t) = g(t)$.	
h.	f est strictement décroissante sur $[14; 24]$.	

2. Traduire en langage mathématique les phrases suivantes :

	Langage courant	Langage mathématique
a.	A minuit, la température de l'eau était de 4° C.	
b.	A quelle heure la température de l'eau est-elle de 4° C ?	
c.	A 8 h, la température de l'eau était inférieure à celle de l'air.	
d.	A quelles heures la température de l'air est-elle supérieure à celle de l'eau ?	
e.	La température minimale de l'eau est de 2° C.	
f.	Entre 6 h et 15 h, la température de l'eau monte.	

2 - A propos des fonctions : éléments caractéristiques d'une fonction

On dispose au sujet d'une fonction numérique f des renseignements suivants :

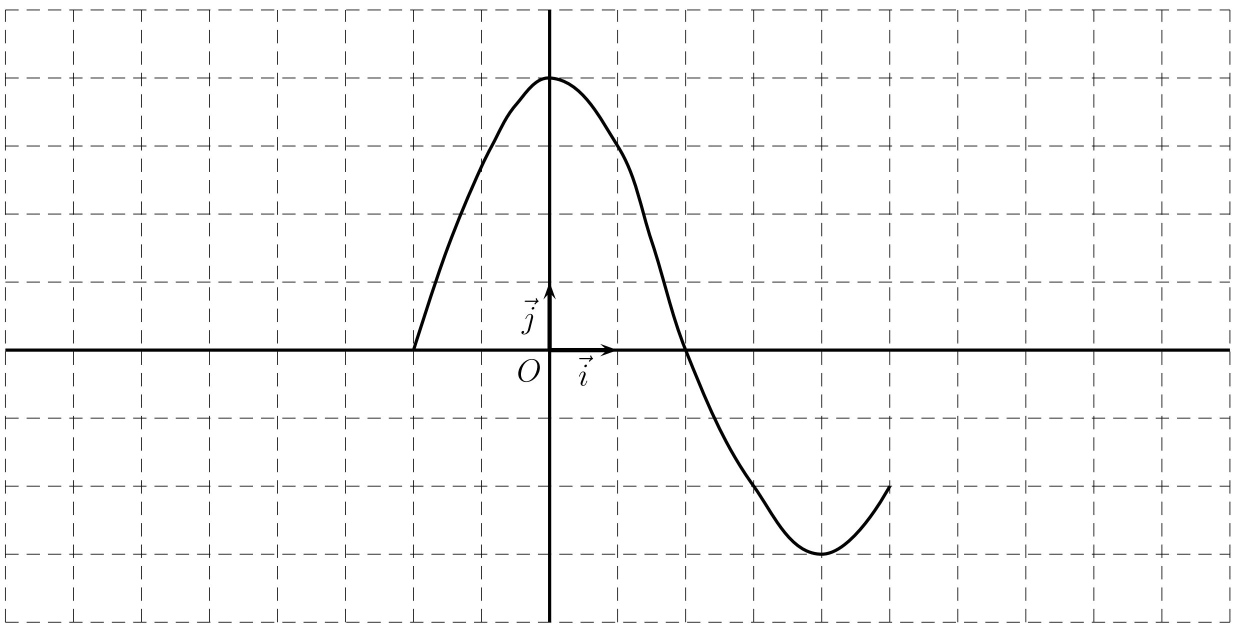
- L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = [-2; 9]$
- Un tableau de valeurs de f est :

x	-2	-1.5	-1	0	1	2	3	4	5	5,5	8,5
$f(x)$	0	1,5	2,7	4	3	0	-2	-3	-2	$-1,5$	-2

- Le tableau de variations de f :

x	-2		0		4		7		9
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3

- On sait d'autre part que la représentation graphique de f, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, est une courbe que l'on peut tracer sans lever le crayon, et dont on fournit l'extrait suivant :



1. Compléter le tableau suivant :

	valeur trouvée	exacte ou approchée	renseignement(s) utilisé(s)
$f(-1)$			
$f(-0,5)$			
$f(7)$			
$f(6)$			
$f(8)$			
$f(-2,5)$			

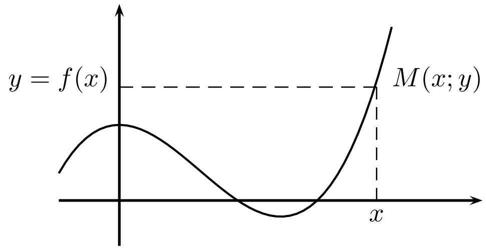
2. Résoudre les équations proposées, en remplissant le tableau comme précédemment :

	valeur(s) trouvée(s)	exacte(s) ou approchée(s)	renseignement(s) utilisé(s)
$f(x) = 3$			
$f(x) = -0,5$			
$f(x) = -1$			
$f(x) = -2$			
$f(x) = -2,5$			
$f(x) = 5$			

I - Rappels

1. Courbe représentative d'une fonction

La courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$, où x appartient à l'ensemble de définition de f.



$M(x;y) \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$

<u>Ex :</u> Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x - 1$.
Un point $M(x;y)$ est sur $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$, c'est-à-dire si $y = 2x - 1$.
$\mathcal{C}_f$ est donc la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Exercice 1 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.
Indiquer les points qui appartiennent à $\mathcal{C}_f$:
$A(0;2)$; $B(1;1)$; $C(-2;4)$; $D(-3;29)$; $E(10;172)$; $F(125;30\,877)$.
Placer ces points dans un repère et tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

2. Fonctions usuelles

a) Fonctions affines

Une fonction affine est une fonction dont l'expression est de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.
La courbe représentative de la fonction affine $f(x) = ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$.

b) Fonction carré

La fonction carré est la fonction f définie pour tout x réel par :

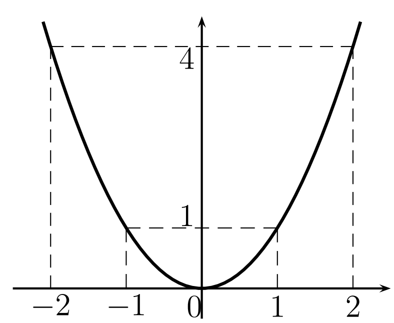
$$\boxed{f(x) = x^2}$$

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	0	↗	

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



c) Fonction cube

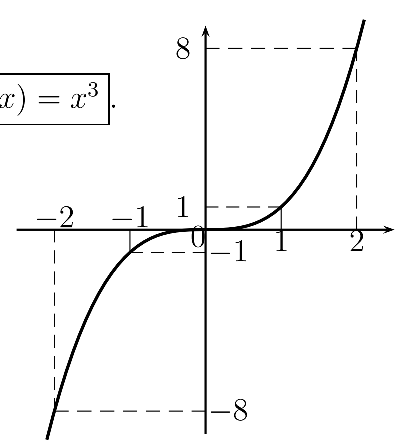
La fonction cube est la fonction f définie pour tout x réel par $\boxed{f(x) = x^3}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↗	0	↗	

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8



d) Fonction inverse

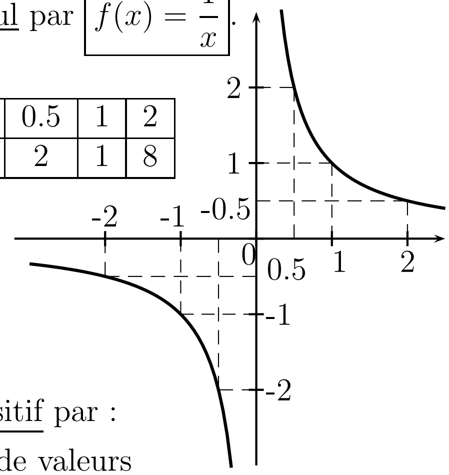
La fonction inverse est la fonction f définie pour x réel non nul par $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x}}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

Tableau de valeurs

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$f(x)$	-0.5	-1	-2	0	2	1	8



e) Fonction racine carrée

La fonction carré est la fonction f définie pour tout x réel positif par :

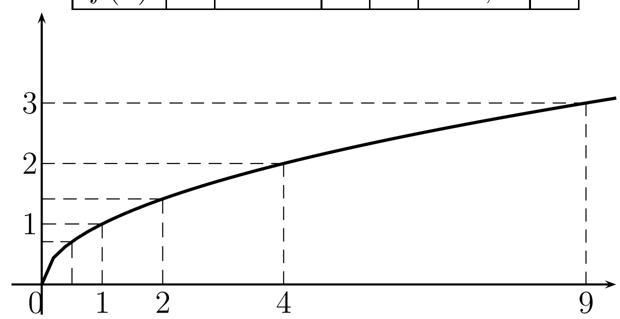
$\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$

Tableau de variations

x	0	$+\infty$
f	0	$\nearrow$

Tableau de valeurs

x	0	0.5	1	2	4	9
$f(x)$	0	$\simeq 0.7$	1	2	$\simeq 1,4$	3



Exercice 2 *(11 p 155)* On considère les fonctions f et g définies sur $[-2;3]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

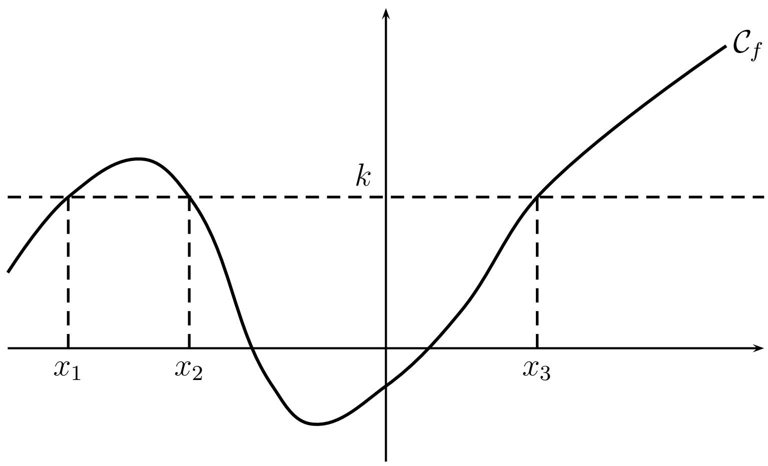
1. Donner le tableau de variation de f et g, et tracer les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ représentatives des fonctions f et g.
2. Répondre par vrai ou faux, en corrigeant si l'affirmation est fausse :
   a) Si $x > 1$, alors $f(x) > 2$
   b) Si $-2 \leq x \leq 3$, alors $4 \leq f(x) \leq 9$
   c) Si $x > 2$, alors $f(x) > g(x)$
   d) Si $0 \leq x \leq 1$, alors $f(x) \geq g(x)$
   e) Si $x < 0$, alors $g(x) > f(x)$

Exercice 3 *(12 p 155)* On considère les fonctions f et g définies sur $]0;2]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = 2x - 1$.

1. Donner le tableau de variation de f et g, et tracer les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ représentatives des fonctions f et g.
2. Répondre par vrai ou faux, en corrigeant si l'affirmation est fausse :
   a) Si $x > 1$, alors $f(x) > 1$
   b) Si $x < 1$, alors $f(x) < 1$
   c) Si $x > 1$, alors $f(x) > g(x)$
   d) Si $0 < x \leq 1$, alors $f(x) \geq 1$
   e) Si $x < 2$, alors $f(x) > 0,5$

II - Equation $f(x) = k$

Soit k un nombre réel fixé. Résoudre l'équation $f(x) = k$, d'inconnue x, consiste à déterminer toutes les valeurs de x telles que $f(x) = k$.



L'équation $f(x) = k$ admet ici trois solutions, x_1, x_2 et x_3 :

$f(x_1) = k$; $f(x_2) = k$ et $f(x_3) = k$

Exercice 4 Résoudre les équations :

a) $4x - 7 = -3x + 7$ b) $-3x - 1 = -3x + 2$ c) $-4x + 1 = 2x - 5$ d) $7x - 2 = 3 + 7x$

Exercice 5 Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = 2x + 1$.

1. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.
2. Résoudre les équations, graphiquement puis par le calcul :

   a) $f(x) = 4$ b) $g(x) = -2$ c) $f(x) = g(x)$

Exercice 6 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 2$ et g la fonction constante $g(x) = 5$.

1. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.
2. Résoudre les équations, graphiquement puis par le calcul :

   a) $f(x) = 6$ b) $g(x) = 4$ c) $f(x) = g(x)$

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

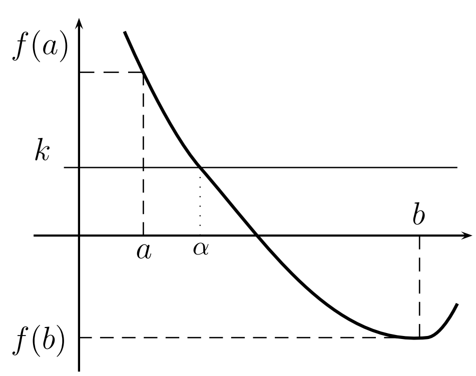
1. Développer $(2x + 1)(x - 3)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x + 1$.

1. Développer $(x - 2)(x + 1)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 3$.

Théorème _Théorème des valeurs intermédiaires_

Si f est une fonction strictement monotone sur $[a; b]$ et si k appartient à l'intervalle $[f(a); f(b)]$ ou $[f(b); f(a)]$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a; b]$.



Exercice 9
Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation :

x	1		3		4
$f(x)$	3	↘	-21	↗	6

Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique dans l'intervalle $[3; 4]$.

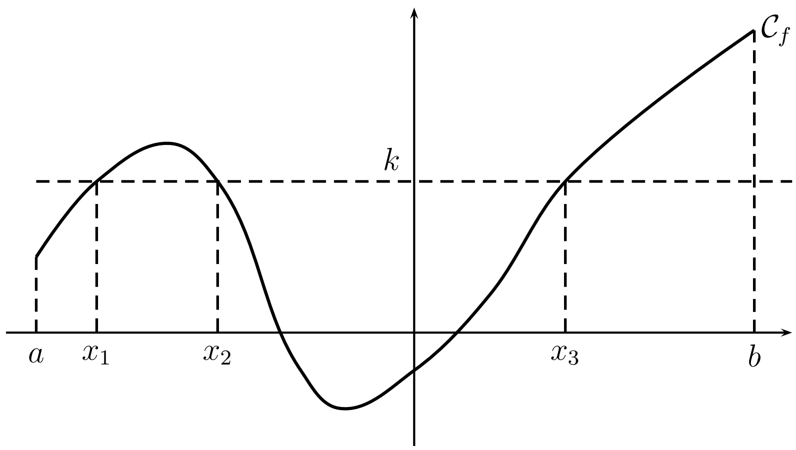
Exercice 10
Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation :

x	-1		0		2		5
$f(x)$	-3	↗	1	↘	-3	↗	7

Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0; 5]$.

III - Inéquation $f(x) < k$, ou $f(x) > k$

Soit k un nombre réel fixé. Résoudre l'inéquation $f(x) < k$, d'inconnue x, consiste à déterminer l'ensemble des valeurs de x telles que $f(x) = k$.



$f(x) < k$ pour $a < x < x_1$ et $x_2 < x < x_3$,

ou,

$f(x) < k$ pour $x \in [a; x_1] \cup [x_2; x_3]$

Exercice 11 On considère la fonction f définie par $f(x) = -2x + 3$.
Tracer la courbe représentative de f, et résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 5$.

Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $[-5; 5]$ par $f(x) = x^2$.
Tracer la courbe de f et résoudre l'inéquation $f(x) \geq 3$.

Exercice 13
Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation :

x	-1		0		2		5
$f(x)$	-2	↗	1	↘	-3	↗	7

et un tableau de valeurs :

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-2	1	-2	-3	-2	3	7

Résoudre les inéquations : $f(x) < -2$ et $f(x) \geq 3$.