Suites numériques

<u>Introduction :</u> Intérêts simpleset composés.

On dispose d'un capital de 1 000 euros que l'on peut placer de deux façons différentes :

- *à intérêts simples* au taux annuel de 10%. Cela signifie que, chaque année, on percevra le même intérêt I égal à 10% du capital de départ.
- *à intérêts composés* au taux annuel de 4%. Cela signifie que, chaque année, le capital acquis augmente de 4% par rapport au capital de l'année précédente.

On note s_n le capital acquis au bout de n années avec un taux d'intérêts simples, et c_n le capital acquis au bout de n années avec un taux d'intérêts composés.

Par exemple, $s_0 = c_0 = 1000$ est le capital initial, s_1 et c_1 sont les capitaux à la fin de la première année, s_2 et c_2 à la fin de la deuxième année ...

1. Calculer s_1, s_2, s_3 et c_1, c_2, c_3.
2. Calculer s_{20} et c_{20}.
3. Déterminer, au bout de 50 ans, lequel des deux placements est le plus avantageux.
4. Au bout de combien d'années, le capital acquis atteindra-t-il 10 000 euros avec chacun de ces deux placements.

I - Définition

<u>Définition</u> *Une* **suite numérique** *est une liste de nombres réels, que l'on peut numéroter avec les nombres entiers naturels (0, 1, 2, 3, ...).*

<u>Ex :</u> Dans l'exercice précédent du calcul du capital avec intérêts simples, on calcule le capital s_n acquis la $n^{\text{ème}}$ année ; on numérote donc ici les années à partir de l'année du placement initial.

On note alors s_1 le capital acquis au bout de 1 an, s_2 au bout de 2 ans, s_3 ...

<u>Définition</u> **Notations**

Une suite numérique se note généralement (u_n), l'indice n représentant un nombre entier naturel.

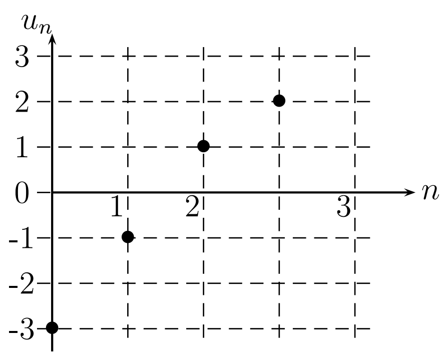
Le nombre u_n est le terme de rang n de la suite (u_n) (le $n^{\text{ème}}$ terme).

<u>Ex :</u> Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n - 3$, alors $u_0 = -3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$ ...

$u_{20} =$ ...

$u_{50} =$ ...

$u_{5250} =$ ...



Exercice 1 Pour chacune des suites suivantes, calculer u_1, u_2, u_3, u_{10} et u_{100} :

- $u_n = 3n - 5$
- $u_n = (-1)^n$
- $u_n = 2 \times 3^n$
- $u_n = \dfrac{n}{n+2}$

Représenter graphiquement les premiers termes de chacune de ces suites.

Définition d'une suite par récurrence. On peut définir une suite en se donnant son premier terme u_0 et une relation qui permet de calculer un terme de la suite à partir de son prédécesseur : on connaît u_0, à partir duquel on peut calculer u_1, à partir duquel on peut calculer u_2, ...

Ex : On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1,04\, u_n \end{cases}$

Alors, $u_0 = 1000$,
$u_1 = 1,04 \times u_0 = 1,04 \times 1000 = 1040$,
$u_2 = 1,04 \times u_1 = 1,04 \times 1040 = 1081,6$,
$u_3 = 1,04 \times u_2 = \ \dots$
...
$u_{50} = 1,04 \times u_{49} \ \dots$

Exercice 2 Pour chacune des suites suivantes, calculer u_1, u_2, u_3, u_{10} :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

Exercice 3 Le chiffre d'affaire d'une société augmente de 50 000 euros chaque année.

En 2010, le chiffre d'affaire était de 300 000 euros. On désigne par u_n le chiffre d'affaire de la société l'année $2010 + n$. Ainsi, on a en 2010, $u_0 = 300\,000$.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer le chiffre d'affaire u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Calculer le chiffre d'affaire pour 2020.
4. Quel est le pourcentage d'augmentation du chiffre d'affaire de 2010 à 2011 ? et de 2011 à 2012 ?

Exercice 4 Une entreprise prévoit d'augmenter sa production chaque mois de 10 %.

Elle produit jusqu'à maintenant 2 000 pièces par mois.

On désigne par u_n le nombre de pièces fabriquées dans n mois. Ainsi, par exemple, $u_0 = 2\,000$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Calculer u_{10}.

Exercice 5 Le salaire d'un employé dans une grande surface d'équipement est augmenté chaque année d'une part fixe dont le montant est de 100 euros, et d'une part s'élevant à 3 % de son salaire de l'année précédente.

Le salaire à l'embauche de cet employé est de 1 800 euros.

On note u_n le salaire de l'employé après n années passées dans l'entreprise.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Calculer u_7.

II - Suites particulières

1. Suites arithmétiques

Définition *Une suite arithmétique est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité r, appelée* **raison** *de la suite, au terme précédent.*
Pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + r$.

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_4 \arrow[r, bend left, "+r"] & \dots & \dots & u_n \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{n+1} & \dots
\end{tikzcd}$$

Exercice 6 • La suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 1$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$. On a : $u_1 = u_0 + 1 = 1$, $u_2 = u_1 + 1 = 2$, ...
(u_n) est la suite des entiers naturels.

• Soit la suite (w_n) définie par la relation $w_n = n^2 + 2$.
Calculer w_0, w_1 et w_2. La suite (w_n) peut-elle être arithmétique ?

Propriété *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$.*

Exercice 7 • Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 2$.
Calculer u_{3002}.

• Soit la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_2 = 1200$ et de raison $r = -10$.
Calculer v_{25}. A partir de quel rang la suite est-elle négative ?

2. Suites géométriques

Définition *Une suite géométrique est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant par la même quantité q , appelée* **raison** *de la suite, le terme précédent.*
Pour tout entier n, $u_{n+1} = q \times u_n$

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_4 \arrow[r, bend left, "\times q"] & \dots & \dots & u_n \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{n+1} & \dots
\end{tikzcd}$$

Ex : • La suite de nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...des puissances successives de 2 est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.

• la suite (v_n) de terme général $v_n = (-1)^n$, pour laquelle $v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_2 = 1$, $v_3 = -1$, ...est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = -1$.

Propriété *Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, alors, pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n$.*

Exercice 8 • Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 0.2$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$.

Calculer u_1, u_4 et u_{20}.

Exercice 9 On utilise une feuille de papier, d'épaisseur $e = 0,5$ mm, que l'on replie successivement en deux.
Quelle est l'épaisseur de la feuille après le premier pliage ? après le deuxième ? après le $n^{\text{ème}}$?

Combien de fois faudrait-il replier cette feuille en deux pour obtenir une épaisseur supérieure à la hauteur de la tour Eiffel (environ 300 m) ?

III - Sens de variation d'une suite

Définition *Une suite (u_n) est dite* **croissante** *si, pour tout entier, $u_{n+1} > u_n$.*
Une suite (u_n) est dite **décroissante** *si, pour tout entier, $u_{n+1} > u_n$.*
Une suite (u_n) est dite **constante** *lorsque pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n$.*

Propriété *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors,*
- *si $r > 0$, la suite est croissante (car $u_{n+1} = u_n + r > u_n$)*
- *si $r < 0$, la suite est décroissante. (car $u_{n+1} = u_n + r < u_n$)*

Propriété *Soit (v_n) une suite géométrique de raison q, alors*
- *si $q > 1$, la suite est croissante (car $u_{n+1} = q \times u_n > u_n$)*
- *si $0 < q < 1$, la suite est décroissante (car $u_{n+1} = q \times u_n < u_n$)*

Exercice 10 Indiquer le sens de variation de chacune des suites suivantes, et les représenter graphiquement :

- la suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$.
- la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_0 = -5$ et de raison $r = 2$.
- la suite arithmétique (w_n) de premier terme $w_0 = 7$ et de raison $r = -3$.
- la suite géométrique (z_n) de premier terme $0,2$ et de raison $q = 1,1$.

Exercice 1 QCM

1. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

   a. $u_0 = -2$ et $r = 3$, alors u_4 est égal à

   ☐ 7 ☐ 12 ☐ 10

   b. $u_1 = -5$ et $u_2 = 2$, alors r est égal à

   ☐ 7 ☐ -3 ☐ -7

   c. $u_3 = 2$ et $u_4 = 5$, alors u_5 est égal à

   ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

2. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10\,000$ et de raison $r = -15$.
   Alors (u_n) est :

   ☐ croisssante ☐ décroissante ☐ constante

3. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 7\,000$ et de raison $q = 0,95$.
   Alors (u_n) est :

   ☐ croisssante ☐ décroissante ☐ constante

4. (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

   a. $u_0 = 3$ et $q = 4$, alors u_3 est égal à

   ☐ 12 ☐ 48 ☐ 192

   b. $u_1 = 5$ et $u_2 = 2$, alors q est égal à

   ☐ 10 ☐ $0,4$ ☐ $2,5$

   c. $u_3 = 2$ et $u_4 = 6$, alors u_5 est égal à

   ☐ 12 ☐ 18 ☐ 36

5. Dans un placement à intérêts composés au taux annuel de 2 %, les capitaux disponibles au bout d'un an, de 2 ans, de 3 ans, ..., de n ans, sont les termes d'une suite géométrique de raison :

   ☐ 2 ☐ $0,02$ ☐ $1,02$

6. On place un capital de 10 000 euros à 4 % par an avec intérêts composés. Au bout de deux ans, le capital est acquis est de :

   ☐ 10 800 euros ☐ 10 816 euros ☐ 10 400 euros

7. La production d'une entreprise augmente de 5 % chaque année. Au bout de 5 ans, elle aura augmenté d'environ

   ☐ 25 % ☐ 27% ☐ 28 %

8. Un équipement informatique perd 20 % de sa valeur chaque année. Au bout de 5 ans, il aura perdu

   ☐ 100 % de sa valeur ☐ environ 33% de sa valeur ☐ environ 67 % de sa valeur

Exercice 2

Un véhicule, acheté en 2012 au prix de 23 250 euros, se déprécie chaque année. Compte tenu du nombre de kilomètres parcourus chaque année, le véhicule perd chaque année 20 % de sa valeur. Cette perte annuelle est calculée sur la valeur résiduelle de l'anné précédente.

Pour tout entier n, on note u_n la valeur résiduelle du véhciule l'année $2012 + n$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Calculer la valeur résiduelle du véhicule en 2013, 2014 et 2022.

Exercice 3 On place un capital $C_0 = 6\,000$ euros à 3,5 % par an avec intérêts composés. Cela signifie que les intérêts d'une année s'ajoutent au capital, et que, l'année suivante, ils raportent eux aussi des intérêts.

On note C_n le capital obtenu (ou "valeur acquise") au bout de n années.

1. Calculer C_1, C_2 et C_3.
2. Donner pour tout entier n, l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.
   En déduire la nature de la suite C_n.
3. Donner alors l'expression de C_n en fonction de n, et calculer le montant du capital acquis au bout de 20 ans.

Exercice 4 **Remboursement d'un emprunt par annuité constante**

On rembourse un emprunt d'un montant D au moyen d'annuités égales.

Soit i le taux de l'emprunt et n le nombre d'années de remboursement, alors l'annuité constante a est donnée par la formule : $a = D\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$.

1. Déterminer le montant de l'annuité constante pour un emprunt $D = 350\,000$ euros effectué sur 15 ans au taux de 4 %.
2. Quel est le prix total payé au bout de 15 ans.

Exercice 5 Le nombre d'élèves d'un lycée était de 1 000 à la rentrée 2009 et de 1 070 à la rentrée 2010.

1. Déterminer le taux d'évolution, sous forme de pourcentage, du nombre d'élèves entre la rentrée 2009 et la rentrée 2010.
2. On suppose que ce pourcentage d'augmentation reste constant. On note E_n le nombre d'élève à la rentrée $2009 + n$.
   a) Exprimer E_{n+1} en fonction de E_n.
   b) En déduire la nature de la suite (E_n).
   c) Déterminer le nombre d'élèves en 2014.

Exercice 6 Un artisan désire acquérir en 2014 une machine qui vaut 19 000 euros. Au 1er janvier 2010, il a placé pour cela la somme de 16 000 euros, à intérêts composés, au taux annuel de 3,75 %. On note u_n le capital, exprimé en euros, disponible au 1er janvier de l'année $2010 + n$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 (arrondir à l'unité).
2. Disposera-t-il d'une somme suffisante en 2014 ?
3. Déterminer la somme qu'il devrait placer en 2010 pour disposer du capital nécessaire en 2014.

Exercice 7 Un véhicule, dont le prix d'achat est de 18 550 euros, est acheté à crédit en 3 remboursements sur 3 ans.

Les 3 remboursement sont notés U_1, U_2 et U_3. Le plan de remboursement est tel que U_1, U_2 et U_3 sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison $0,8$.

1. a) Ecrire U_2 en fonction de U_1.
   b) Ecrire U_3 en fonction de U_1.
2. La somme des 3 remboursements est égale au prix d'achat du véhicule.
   En déduire que $2,44\,U_1 = 18\,550$.
3. Cacluler alors U_1, puis U_2 et U_3.