Fonctions polynômes - Second et troisième degré

$1^{\text{ère}} STI2D$

I - Trinôme du second degré

1) Equations du second degré

Définition *On appelle trinôme du second degré toute expression de la forme ax^2+bx+c, où a, b et c sont trois nombres réels quelconques, et $a \neq 0$.*

Exemple : de trinômes du second degré :

Trinômes	$a =$	$b =$	$c =$
$P(x) = 3x^2 + 2x - 5$	$a = 3$	$b = 2$	$c = -5$
$Q(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \dfrac{2}{3}$	$a = \sqrt{2}$	$b = -3$	$c = \dfrac{2}{3}$
$R(x) = -x^2 + \dfrac{5}{2}x$	$a = -1$	$b = \dfrac{5}{2}$	$c = 0$
$S(x) = 3x^2 - \left(1-\sqrt{2}\right)x - \pi$	$a = 3$	$b = -\left(1-\sqrt{2}\right)$	$c = -\pi$
$T(x) = \dfrac{6}{5}x^2 - 3$	$a = \dfrac{6}{5}$	$b = 0$	$c = -3$
$U(x) = (x-2)^2 + 3(x+3)$	$a = \dots$	$b = \dots$	$c = \dots$

Définition *On appelle* **discriminant** *du trinôme du second degré ax^2+bx+c, noté Δ, le nombre :*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

.

Exemple : de discriminant de trinômes du second degré :

Trinômes	$a =$	$b =$	$c =$	$\Delta =$
$P(x) = 3x^2 + 2x - 5$	$a = 3$	$b = 2$	$c = -5$	$\Delta = 64$
$Q(x) = x^2 + 2x + 1$	$a = 1$	$b = 2$	$c = 1$	$\Delta = 0$
$R(x) = x^2 - \sqrt{2}x - 5$	$a = 1$	$b = \sqrt{2}$	$c = -5$	$\Delta = 22$

Propriété

- *Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) admet deux solutions distinctes, aussi appelées* **racines** *:*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) admet une unique solution, ou* **racines***, double :*

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- *Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution réelle.*

Exercice 1 Déterminer les solutions des équations :

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ b) $x^2 - 1 = 0$ c) $x^2 + 1 = 0$

d) $4x^2 + 8x - 5 = 0$ e) $3x^2 + x + 6 = 0$ f) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = 0$

g) $2x^2 - x - 4 = x^2 + 8$ h) $x(x-1) = -2(3x+7)$ i) $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$

2) Fonction du second degré

Une fonction du second degré est une fonction dont l'expression peut s'écrire sous la forme d'un trinôme du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On rappelle que la courbe représentative d'une fonction du second degré est une parabole dont le sommet est situé en $x = -\frac{b}{2a}$:

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Exercice 2 Tracer l'allure des courbes des fonctions f, g et h définies par :
$f(x) = x^2 + x - 2$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 2$ et $h(x) = x^2 + 1$.

Donner alors leur tableau de signes.

3) Signe d'un trinôme du second degré

Propriété *Soit $f(x)=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$. Alors :*

- *Si $\Delta>0$, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 et*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		*Signe de a*	0	*Signe de $-a$*	0	*Signe de a*	

- *Si $\Delta=0$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution x_0 et*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		*Signe de a*	0	*Signe de a*	

- *Si $\Delta<0$, le trinôme $f(x)$ n'a pas de racine et*

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		*Signe de a*	

Exercice 3 Etudier le signe de :

a) $P(x)=x^2-2x+1$ b) $Q(x)=x^2-1$ c) $R(x)=x^2+1$

d) $S(x)=3x^2-5x+2$ e) $T(x)=2x^2+x+3$ f) $U(x)=\dfrac{4}{9}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{4}$

Exercice 4 Résoudre les inéquations :

a) $x^2-2x+1>0$ b) $-3x^2+5x-2\leqslant 0$ c) $x^2-4x-4\geqslant 0$

d) $-2x^2+5x\leqslant 2$ e) $3x^2\geqslant 2x-1$ f) $x(2x-5)\geqslant x-6$

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $x(2x-5)=x+6$ b) $(2x-3)(2x+3)-(2x-1)(x+2)=0$

c) $\dfrac{x-5}{5}=\dfrac{2}{x-2}$ d) $\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{3x-1}{x+3}$ e) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-9}=1$

Exercice 6 Etudier le signe de :

a) $f(x)=2x^2+3x-9$ b) $g(x)=-x^2+x-3$ c) $h(x)=x-\dfrac{1}{x}$

d) $k(x)=x-3+\dfrac{2}{x}$ e) $l(x)=2x+\dfrac{4}{x-3}$

4) Exercices

Exercice 7 Déterminer les points d'intersection (s'ils existent) de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$:

a) $\mathcal{P}: y=x^2-3x+1$ et $\mathcal{D}: y=-2x+1$ b) $\mathcal{P}: y=\dfrac{1}{2}x^2+x-4$ et $\mathcal{D}: y=3x-6$

c) $\mathcal{P}: y=x^2-3x+1$ et $\mathcal{D}: y=-2x+1$ d) $\mathcal{P}: y=-x^2+x+2$ et $\mathcal{D}: y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

Exercice 8 Déterminer la position relative des paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$:

a) $\mathcal{P}: y=x^2-x+2$ et $\mathcal{P}': y=-x^2+2x-6$

b) $\mathcal{P}: y=-2x^2-3x+2$ et $\mathcal{P}': y=x^2+x+1$

c) $\mathcal{P} : y = 2x^2 - 3x - 4$ et $\mathcal{P}' : y = 2x^2 + 6x + 5$

Exercice 9 Soit m un nombre réel. On considère l'équation $4x^2 + (m-1)x + 1 = 0$.

a) Déterminer m pour que cette équation admette une unique solution. Déterminer cette solution.

b) Préciser les cas, en fonction de m, où cette équation admet deux solutions distinctes, et où cette équation n'admet aucune solution.

Exercice 10 Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = \dfrac{1}{2}x^2$ et $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = x + m$.

1. Tracer dans un repère orthogonal la parabole $\mathcal{P}$ et les droites $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_{-2}$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_4$.
2. Pour quelles valeurs de m, la droite $\mathcal{D}_m$ coupe-t-elle $\mathcal{P}$ en deux points distincts A_1 et A_2 ?
3. Calculer, en fonction de m, les coordonnées des points A_1 et A_2, puis du point I_m milieu de $[A_1A_2]$.
   Que peut-on dire des abscisses des points I_m ?
   En déduire que I_m appartient à une demi-droite que l'on précisera.

Exercice 11 Soit P le trinôme défini par $P(x) = 3x^2 + (a-1)x + (a+8)$, où $a \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a, P admet-il une racine double ? Calculer cette racine.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de a, le nombre 2 est-il racine de P ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de a, P n'a-t-il aucune racine réelle ?

Exercice 12 La vitesse moyenne d'un avion de tourisme est de 250 km/h. Cet avion effectue le vol aller et retour Paris-Lyon. La distance entre ces deux villes est de 400 km.
A l'aller, il bénéficie d'un vent favorable d'une vitesse de x km/h. Au retour, il est freiné par ce même vent, et met donc 40 minutes de plus qu'à l'aller.

1. Compte tenu du vent, quelle est la vitesse de l'avion à l'aller ? Quelle est la durée du trajet aller ?
2. Compte tenu du vent, quelle est la vitesse de l'avion au retour ? Quelle est la durée du trajet retour ?
3. Ecrire une équation reliant le temps aller et le temps retour.
4. Résoudre cette équation et donner la vitesse du vent.

Exercice 13 Le périmètre d'un rectangle mesure 12 cm.

1. Soit x la longueur, en cm, de ce rectangle. Dans quel intervalle varie x ?
2. Quelle est la mesure de la largeur en fonction de x ?
3. Calculer l'aire de ce rectangle en fonction de x.
4. On souhaite que l'aire de ce rectangle soit supérieure à 5 cm^2.
   Quelle inéquation doit-on résoudre ?
   Résoudre alors cette inéquation et en déduire quelles dimensions donner à la longueur.

II - Fonctions polynômes de degré 3

Définition *On appelle fonction polynôme de degré 3, ou du troisième degré, toute fonction f dont l'expression peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d sont des nombres réels, et $a \neq 0$.*

Exercice 14 Résoudre graphiquement, puis exactement, l'équation de degré 3 : $x^3 = 8$.

Propriété *Rappel : L'équation $x^3 = a$ admet une unique solution qui s'écrit $x = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.*

Exercice 15 Résoudre les équations, et donner une valeur approchée de la solution :

$E_1 : x^2 = 27$, $E_2 : x^3 = -729$, $E_3 : x^3 = 0,8$, $E_4 : 3x^3 = 24$, $E_5 : -2x^3 + 8 = -120$

Exercice 16 On note f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x - 2$. À l'aide de la calculatrice, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f puis résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -2$.
Résoudre ensuite cette équation exactement.

Propriété *Soit f une fonction de degré définie par sa forme développée $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.*

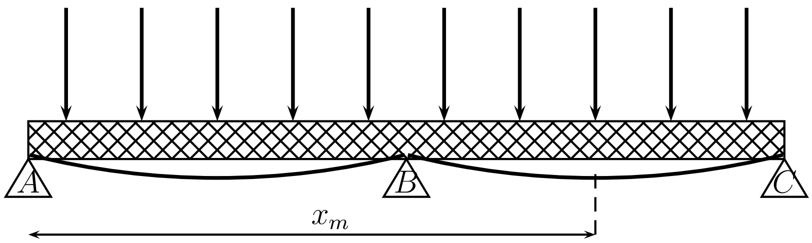
- *Si f admet une racine x_1, alors f peut se factoriser par $f(x) = a(x - x_1)(ex^2 + fx + g)$*
- *Si f admet trois racines x_1, x_2 et x_3, alors f peut s'écrire sous la forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$*

Exemple : Soit le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.
Montrer que 2 est une racine de P, puis factoriser P.
Déterminer alors toutes les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 17 Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x - 1$.
Vérifier que -1 est une racine de P est factoriser P.
Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 18 Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$.
Vérifier que -2 est une racine de P, puis factoriser P.
Déterminer alors toutes les racines de P, puis dresser le tableau de signe de $P(x)$.

Exercice 19 *Déformation d'une poutre*
Une poutre de longueur 2 mètres repose sur trois appuis simples A, B et C, l'appui B étant situé au milieu de $[AC]$.
Elle supporte une charge uniformément répartie de 1 000 N.m^{-1} (newtons par mètre). Sous l'action de cette charge, la poutre se déforme.



On démontre que le point situé entre B et C où la déformation (la flèche) est maximum, a une abscisse x_m qui est solution de l'équation :

$$32x^3 - 156x^2 + 240x - 116 = 0\,.$$

1. Vérifier que 1 est solution de cette équation.
2. Factoriser alors l'équation et la résoudre.
3. En déduire x_m, position de la section de poutre de flèche maximum entre les points B et C.

III - Polynômes

Définition *Un* **polynôme** *est une expression de la forme :*

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + dx + e$$

avec a, b ,c, d et e des nombres réels quelconques, et n un entier naturel.
L'entier n est le **degré** *du polynôme.*

Exemple :

- $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 3$ est un polynôme de degré 4.
- $Q(x) = 5x^7 - 3x^2 + 4$ est un polynôme de degré 7.
- $R(x) = x^2 + x + 1$ est un polynôme (trinôme) de degré 2.