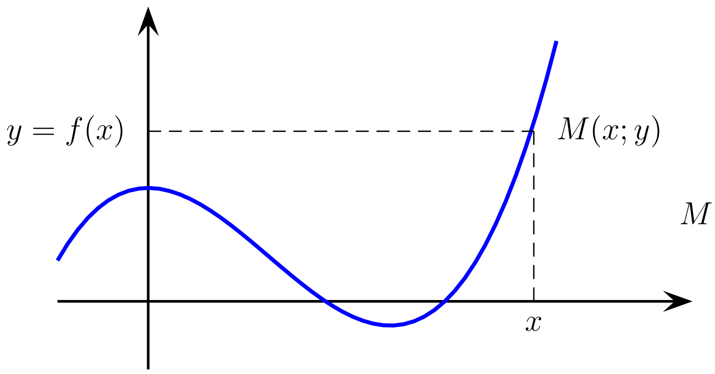
Dérivation des fonctions

$1^{\text{ère}} STI2D$

1 Rappel sur les fonctions

1.1 Courbe représentative d'une fonction

La courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$, où x appartient à l'ensemble de définition de f.



$M(x; y) \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$

Exemple : Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x - 1$.
Un point $M(x; y)$ est sur $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$, c'est-à-dire si $y = f(x) = 2x - 1$.
$\mathcal{C}_f$ est donc la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Exercice 1 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.
Indiquer les points qui appartiennent à $\mathcal{C}_f$:
$A(0; 2)$; $B(1; 1)$; $C(-2; 4)$; $D(-3; 29)$; $E(10; 172)$; $F(125; 30\,877)$.
Placer ces points dans un repère et tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

1.2 Fonctions affines et droites

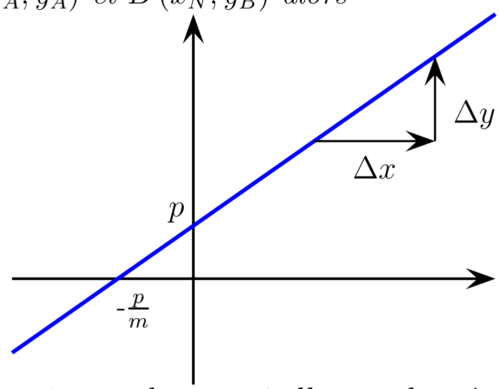
Une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ par une expression qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = mx + p$.
Sa courbe représentative est la droite d'équation $y = mx + p$.

Exercice 2 Tracer les droites $D_1 : y = 2x + 1$, $D_2 : y = -x + 1$ et $D_3 : y = 2x + 3$.
Tracer la courbe représentative des fonctions définies par les expressions $f(x) = x^2$, $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$, $h(x) = 2x - 1$.

Propriété *Soit la fonction affine $f(x) = mx + p$ et sa droite représentative d'équation $y = mx + p$:*

- *p est l'ordonnée à l'origine (lorsque $x = 0$)*
- *m est le coefficient directeur, ou la pente :*
  Si la droite passe par $A(x_A; y_A)$ et $B(x_N; y_B)$ alors

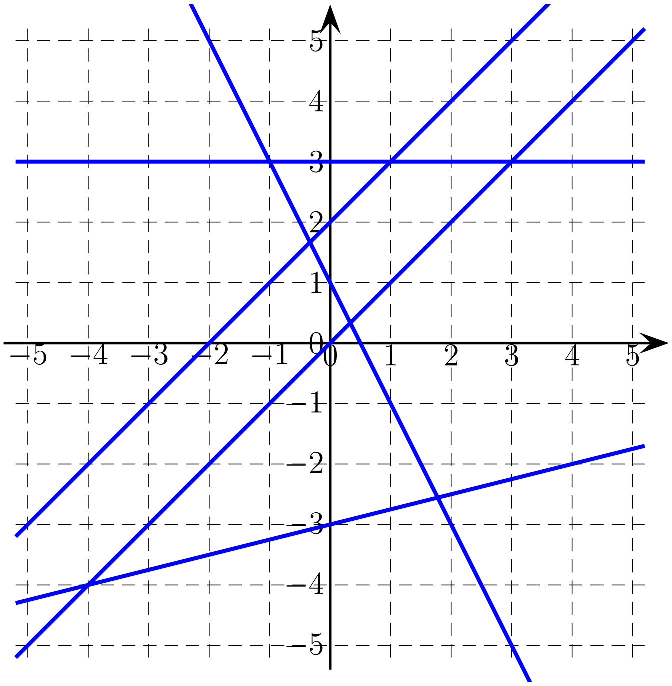
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur

Exercice 3 Déterminer l'équation de la droite D passant par $A(1; 2)$ et $B(5; 10)$.

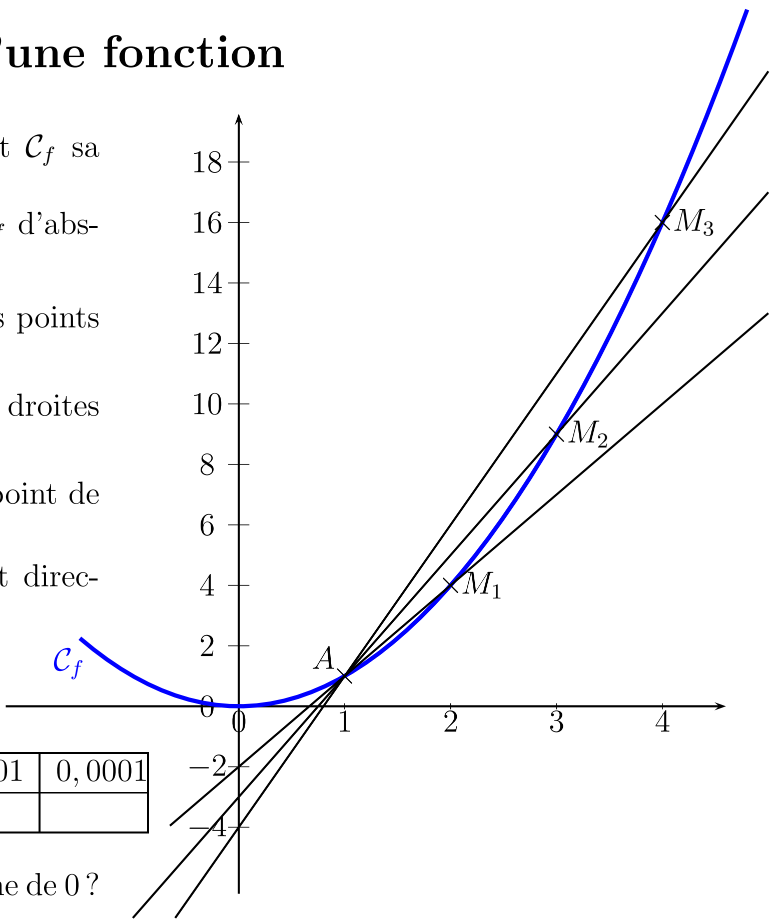
Exercice 4
Déterminer l'équation des droites.



Exercice 5 Soit $f(x) = x^2 - 2x$. Soit A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1, et B le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 3. Déterminer l'équation de la droite D passant par A et B. Tracer $\mathcal{C}_f$ et D.

2 Nombre dérivé en a d'une fonction

Exercice 6 Soit f la fonction carré et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On note A, M_1, M_2 et M_3 les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 1, 2, 3 et 4.



1. Tracer sur une figure $\mathcal{C}_f$ et placer les points A, M_1, M_2, M_3.
2. Calculer les coefficients directeurs des droites (AM_3), (AM_2) et (AM_1).
3. Soit un nombre réel $h > 0$, et M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $1 + h$.
   Donner une expression du coefficient directeur m_h de la droite (AM).
4. Compléter le tableau :

h	1	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
m_h						

5. Que se passe-t-il lorsque h se rapproche de 0 ?

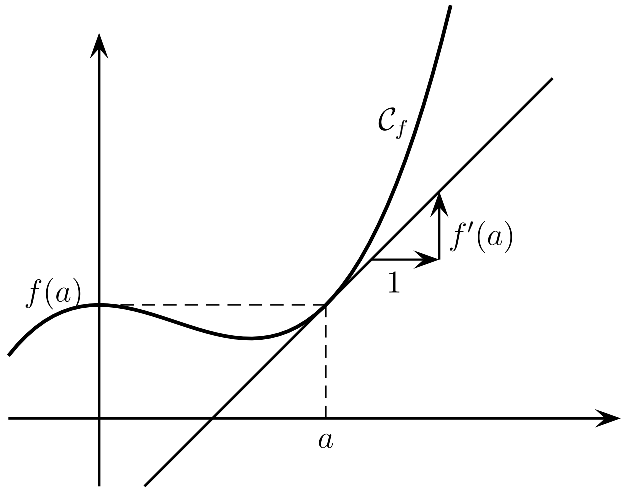
Définition • *On appelle taux d'accroissement, ou taux de variation, en a de la fonction f le nombre*

$$\tau_a(h) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

• *On appelle nombre dérivé en a la limite, lorsqu'elle existe, de $\tau_a(h)$ quand h se rapproche, ou tend vers, 0. On note ce nombre, lorqu'il existe, $f'(a)$:*

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \tau_a(h) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \end{aligned}$$

• *Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.*



Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$.

1. Tracer dans un repère orthogonal $\mathcal{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse $a = 1$.
   Déterminer alors graphiquement $f'(1)$.
2. a) Pour $h > 0$, on pose $m_h = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
   Compléter le tableau :

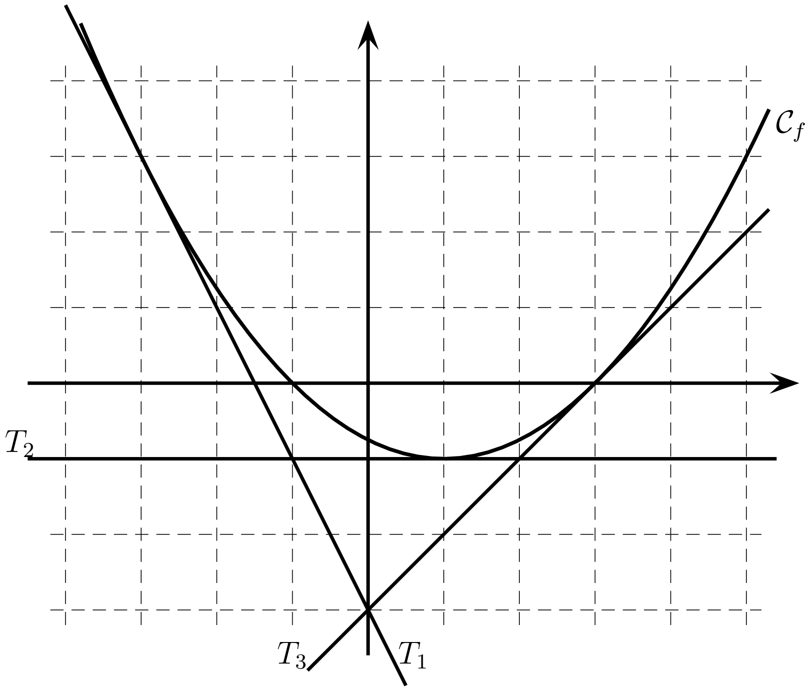
h	1	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001
m_h						

   Vers quelle valeur tend le nombre a_h lorsque le nombre h tend vers 0 ?

   b) Démontrer ce résultat algébriquement à partir de l'expression de m_h et de celle de f.

Exercice 8 $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f.
T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -3, 1 et 3.

Déterminer $f'(-3)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.



3 Fonction dérivée

Définition *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

- *On dit que f est dérivable sur I si f admet un nombre dérivé en tout point de I, c'est-à-dire si pour tout $a \in I$, $f'(a)$ existe.*
- *On appelle* **fonction dérivée** *de f la fonction notée f' qui, à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.*

<u>Dérivées des fonctions usuelles</u>

Fonction $f(x) =$	Dérivée $f'(x) =$	f est définie sur	f est dérivable sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$	
x	1	$\mathbb{R}$	
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	

Opérations sur les dérivées

Fonction	Dérivée
$ku,\ k \in \mathbb{R}$	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
$u^n\ (n \in \mathbb{N})$	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$

Composées de fonctions

Fonction	Dérivée
u^2	2u'u
u^n	$u'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$

Exercice 9 Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x)=3$ b) $f(x)=3x$ c) $f(x)=\dfrac{5}{2}x$ d) $f(x)=x^2$

e) $f(x)=x^7$ f) $f(x)=2x^3$ g) $f(x)=3x+2$ h) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

i) $f(x)=-x^2+x-\dfrac{7}{2}$ j) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ k) $f(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{x+1}$ l) $f(x)=\dfrac{4}{x}$

m) $f(x)=2x^5-\dfrac{x^3}{3}$ n) $f(x)=(3x+2)x^2$ o) $f(x)=(-2x+1)(x+1)$ p) $f(x)=\dfrac{-2x+1}{(x+1)^2}$

p) $f(x)=3\cos(x)$ n) $f(x)=\cos^2(x)$ o) $f(x)=\sin(2x+1)$ p) $f(x)=x\sin(2^2+1)$

4 Applications de la dérivation

4.1 Équation d'une tangente

Propriété *Soit f une fonction dérivable en x_0 et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est*

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Exercice 10 Soit la fonction f définie par $f(x)=x^2-2x$.

1. Donner le tableau de variation de f
2. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x_0=2$.
3. Donner de même les équations des tangentes en $x_0=-2$, $x_0=0$ et $x_0=1$.
4. Tracer dans un repère ces quatre droites et $\mathcal{C}_f$.

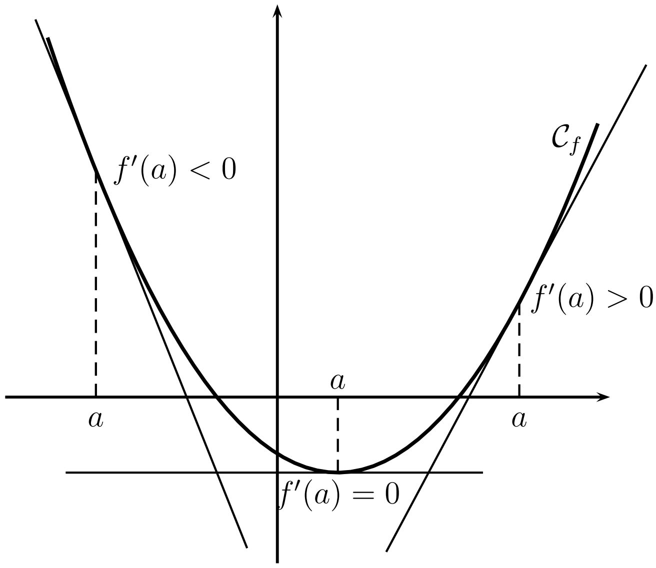
Exercice 11 Donner dans chacun des cas l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'absisse a :

1) $f(x)=x^3+8x-32$ en $a=2$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-x+2}$ en $a=1$ 3) $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

4.2 Sens de variation d'une fonction

On a vu que le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a ; ainsi

- si $f'(a) > 0$, la tangente est une droite strictement croissante, et il en est de même de f "au voisinage" de a
- si $f'(a) < 0$, la tangente est une droite strictement décroissante, et il en est de même de f "au voisinage" de a



Théorème *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.*

Exercice 12 Dresser le tableau de variation des fonctions de l'exercice précédent de a) à l) et des fonctions suivantes :

q) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ r) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$ s) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ t) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{(x+1)^2}$

t) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 1$

4.3 Extrema d'une fonction

Définition *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

- *Un* **extremum** *est un minimum ou un maximum.*
- *f présente un* **maximum local** *$m = f(x_0)$ si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.*
- *f présente un* **minimum local** *$m = f(x_0)$ si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.*
- *L'extremum est dit* **global** *lorsque $J = I$.*

Théorème *Si $f(x_0)$ est un extremum local sur l'intervalle $]a; b[$, alors $f'(x_0) = 0$.*
La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f admet une tangente horizontale au point $(x_0 \ ; \ f(x_0))$.

Remarque : Ce théorème dit que : $f(x_0)$ extremum local $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$.
La réciproque : $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f(x_0)$ extremum local est FAUSSE.

Par exemple, soit $f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$ et $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Ainsi, $f'(0) = 0$. Néanmoins $f(0)$ n'est ni un minimum ni un maximum local de f car pour $x < 0$, $f(x) = x^3 < 0 = f(0)$ et pour $x > 0$, $f(x) = x^3 > 0 = f(0)$.

Exercice 13 Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10$.
Rechercher les éventuels extrema locaux et globaux de f.

Exercice 14 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Déterminer les coordonnés de l'extremum de f. Est-ce un minimum ou un maximum ?

Exercice 15 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f' :

x	-6		-2		1		4
f'	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 16 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f' :

x	-4		-1		1		2		4
f'	-7	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 17 La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v, pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h, par l'expression

$$C(v) = 0,06v + \frac{150}{v} .$$

A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

4.4 Résolution d'équations

Théorème des valeurs intermédiaires
Soit k un nombre réel, f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$ telle que

- *f est dérivable sur $[a; b]$*
- *f est strictement monotone sur $[a; b]$*
- *$f(a) < k < f(b)$ ou $f(a) > k > f(b)$*

alors, il existe un unique $\alpha \in]a; b[$ tel que $f(\alpha) = k$.

Exercice 18 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2; 5]$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		4		5
f	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	10

Déterminer le nombre de solutions, et l'intervalle elles se situent, de l'équation
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = -5$

Exercice 19 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3; 2]$.
Déterminer un encadrement plus précis de cette solution.

Exercice 20 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions, respectivement dans les intervalles $]-2; -1[$, $]-1; 1[$ et $]1; 2[$.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la plus grande de ces solutions.