Suites numériques

$1^{\text{ère}}STI2D$

Table des matières

I Introduction - Généralités

Définition *Une suite numérique est une liste de nombres réels, ordonnée, et indéxée par les entiers naturels (ou numérotée).*

Exercice 1 Compléter les suites "logiques" suivantes. Donner, si possible, le $10^{\text{ème}}$ nombre de la suite, puis le $20^{\text{ème}}$.

a) 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;...

b) 2 ;4 ;6 ;8 ;10 ;...

c) 3 ;7 ;11 ;15 ;19 ;...

d) 2 ;4 ;8 ;16 ;32 ;...

e) 2 ;3 ;5 ;9 ;17 ;...

f) 0 ;1 ;8 ;27 ;64 ;125 ;...

g) 1 ;1 ;2 ;3 ;5 ;8 ;13 ;21 ;...

Définition *On note u ou (u_n) la suite constituée par* ***tous*** *ses termes.*
On note $u(n)$, ou u_n le n-ième terme de la suite.
$u(n)$ ou u_n est le terme de rang n, ou d'indice n, de la suite.

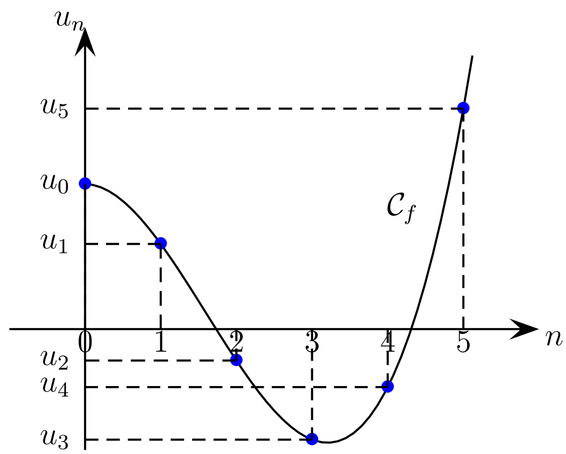
Par exemple, avec la dernière suite de l'exercice précédent, on note u ou (u_n) la suite, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de la suite : $u = \{1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; \dots\}$.

On a, par exemple, en commençant à compter à 0 : le premier terme $u_0 = 1$, puis $u_1 = 1$, ..., $u_6 = 8$, ...

II Modes de génération d'une suite

On peut définir une suite de deux façons : **explicitement** ou **par récurrence** (ou implicitement).

- **Explicitement :** à partir d'une fonction f : le terme général de la suite est alors $u_n = f(n)$.



On parle aussi d'**échantillonnage** : la suite (u_n) est constituée d'échantillons de la fonction f :

$$u_0 = f(0)\ ;\ u_1 = f(1)\ ;\ u_2 = f(2)\ ;\ \dots$$

On parle aussi de **numérisation d'un signal**.

- **Par récurrence**, ou implicitement : comme chaque terme de la suite est numéroté, chaque terme a un prédécesseur et un successeur ; on peut donc définir une suite en indiquant son premier terme u_0 et une relation permettant de connaître un terme connaissant son (ou ses) prédecesseur.

  Par exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.
  Alors, $u_1 = u_0^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$, $u_2 = u_1^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$, $u_3 = u_2^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$, ...

Exercice 2 Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{2}n^2 + 1$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_{10}, u_{100} et u_{1000}.
2. Donner l'expression de la fonction f telle que $u_n = f(n)$.
3. À l'aide de la calculatrice, tracer l'allure de la courbe représentative de f et la représentation des premiers valeurs de la suite (u_n).

Exercice 3 Reprendre les questions de l'exercice précédent avec (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n-1}{n^2+1}$.

Exercice 4 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3, puis u_{10}, u_{100} et u_{1000}.

Exercice 5 Reprendre les questions de l'exercice précédent avec la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{2v_n^2 - 1}{v_n^2 + 2}$.

III Suites arithmétiques

Définition *Une suite (u_n) est arithmétique si pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours le même nombre r, qu'on appelle alors la raison de la suite.*
On a ainsi,

$$\begin{aligned}(u_n)\ \textit{arithmétique} &\iff \textit{Pour tout entier } n, u_{n+1} = u_n + r \\ &\iff \textit{Pour tout entier } n, u_{n+1} - u_n = r = \textit{Constante}\end{aligned}$$

Exercice 6 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n^2 + 3$.

Calculer u_1, u_2 et u_3.
La suite (u_n) peut-elle être arithmétique ?

Exercice 7 Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) peut-elle être arithmétique ?
2. Montrer que la suite (u_n) est arithmétique.
3. Représenter graphiquement les premiers points de la suite.

Exercice 8 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 5$.
Calculer les valeurs u_1, u_2, $u10$ et u_{100}.

Propriété *Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout entier n,*

$$u_n = u_0 + nr$$

La représentation graphique d'une suite arithmétique est un ensemble de points alignés, sur la droite d'équation $y = u_0 + rx$.

IV Suites géométriques

Définition *Une suite (v_n) est géométrique si pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par le même nombre q, qu'on appelle alors la raison de la suite.*
On a ainsi,

$$\begin{aligned}(u_n) \textit{ géométrique} \quad &\iff \quad \textit{Pour tout entier } n, u_{n+1} = qu_n \\ &\iff \quad \textit{Pour tout entier } n, \frac{u_{n+1}}{u_n} = q = \textit{Constante}\end{aligned}$$

Exercice 9 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n^2 + 3$.
Calculer u_1, u_2 et u_3.
La suite (u_n) peut-elle être géométrique ?

Exercice 10 Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3^n$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) peut-elle être géométrique ?
2. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.

Exercice 11 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$.
Démontrer que cette suite est géométrique.

Exercice 12 (u_n) est géométrique de raison $q = -2$.
Sachant que $u_5 = 12$, calculer u_6, u_7 et u_{10}.

Exercice 13 Soit la suite (u_n) géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 4$.
Calculer u_1, u_2, u_3, u_{10} et u_{30}.

Exercice 14 Un capital $C = 10\,000$ euros est placé au taux de 4 % : à la fin de chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital.

1. Quel est le capital C_1 à la fin de la première année ? Le capital C_2 à la fin de la deuxième année ?
2. Soit C_n le capital au bout de n années. Quel est la nature de la suite C_n ?
3. Au bout de combien d'année le capital aura-t'il doublé ?

Propriété *Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors, pour tout entier n,*

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Exercice 15 Une ville compte 100 000 habitants en 2010. Chaque année sa population baisse de 2 %. Soit P_n sa population l'année $2010 + n$.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3.
2. Quelle est la nature de la suite (P_n) ? Donner alors l'expression de P_n en fonction de n.

V Exercices

Exercice 16 Un service commercial a constaté que, chaque année, 1000 nouveaux abonnés sont enregistrés mais que la moitié des abonnés de l'année précédente ne renouvèlent pas leur abonnement.

En 2010, 4000 personnes étaient abonnées.

On note a_n le nombre d'abonnés l'année $2010 + n$, ainsi, $a_0 = 4000$.

1. Déterminer le nombre d'abonnés en 2011 puis 2012.
2. Déterminer a_1, a_2, a_3 et a_4.
3. Exprimer le nombre d'abonnés a_{n+1} en fonction du nombre d'abonnés a_n.
4. Calculer à l'aide de la calculatrice le nombre d'abonnés en 2025.
5. Vers quelle valeur semble se stabiliser la suite a_n ?

Exercice 17 En Inde, un roi, à qui un mathématicien venait de présenter le jeu d'échec, fut si émerveillé qu'il lui proposa de choisir lui-même sa récompense.

Le mathématicien demanda au roi de le récompenser en grains de blé de la façon suivante :

— sur la 1ère case de l'échiquier, 1 grain de blé

— sur la 2ème case, 2 grains de blé,

— sur la 3ème case, 4 grains de blé,

— et ainsi de suite, en déposant sur chaque case le double de grains de celui de la case précédente.

Un échiquier comporte 64 cases. On note u_n le nombre de grains de blé sur la n-ième case.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
2. On note S la somme des grains de blé sur l'échiquier.
   Ecrire un algorithme qui permet de calculer S. Le programmer et donner la valeur de S.
3. Si un grain de riz pèse $0,2$g, donner, en tonnes, le poids de blé sur l'échiquier.

Exercice 18 Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n + 3$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3. La suite (v_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. Calculer v_{10} et v_{100}.
3. On définit la suite (w_n) par $w_n = v_n - 6$.
   a) Donner l'expression de w_{n+1} en fonction de v_n, puis de w_n.
   b) Quelle est la nature de la suite (w_n) ? Exprimer alors w_n en fonction de n.
   c) Exprimer v_n en fonction de w_n, puis en fonction de n.

Exercice 19 Soit la suite u définie par $u(0) = 1$ et, pour tout entier n, $u(n+1) = 2u(n) + 2n - 1$.

1. Calculer les premiers termes $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.
   La suite u est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On pose $v(n) = u(n) + 2n + 1$ pour tout n.
   Calculer les premiers termes $v(1)$, $v(2)$ et $v(3)$ et démontrer que cette suite v est géométrique.
   En déduire l'expression de $v(n)$ en fonction de n, puis de $u(n)$ en fonction de n.

Exercice 20 Soit la suite w définie par $\begin{cases} w(0) = -1 \\ w(n+1) = \dfrac{9}{6 - w(n)} \end{cases}$.

1. Calculer $w(1)$, $w(2)$ et $w(3)$.
2. La suite w est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. On définit la suite z par $z(n) = \dfrac{1}{w(n) - 3}$.
   a) Donner l'expression de $z(n+1)$ en fonction de $w(n)$, puis de $z(n)$.
   b) Quelle est la nature de la suite z ? Exprimer alors $z(n)$ en fonction de n.
   c) Exprimer $w(n)$ en fonction de $z(n)$, puis en fonction de n.