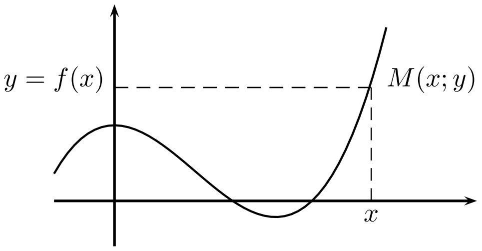
Dérivation des fonctions

1 Rappel sur les fonctions

1.1 Courbe représentative d'une fonction

La courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$, où x appartient à l'ensemble de définition de f.



$$M(x;y) \in \mathcal{C}_f \text{ si et seulement si } y = f(x)$$

<u>Ex :</u> Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x - 1$.
Un point $M(x;y)$ est sur $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$, c'est-à-dire si $y = f(x) = 2x - 1$.
$\mathcal{C}_f$ est donc la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Exercice 1 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.
Indiquer les points qui appartiennent à $\mathcal{C}_f$:
$A(0;2)$; $B(1;1)$; $C(-2;4)$; $D(-3;29)$; $E(10;172)$; $F(125;30\,877)$.
Placer ces points dans un repère et tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

1.2 Fonctions de références (ou usuelles)

1.2.1 Fonctions affines

Une fonction affine est une fonction dont l'expression est de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.
La courbe représentative de la fonction affine $f(x) = ax + b$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $y = f(x)$, soit $y = ax + b$, c'est-à-dire la droite d'équation $y = ax + b$.
Le coefficient a est le coefficient directeur de la droite, b son ordonnée à l'origine.

1.2.2 Fonction carré

La fonction carré est la fonction f définie pour tout x réel par :

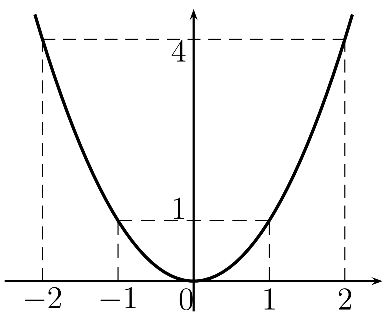
$$\boxed{f(x) = x^2}$$

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



1.2.3 Fonction cube

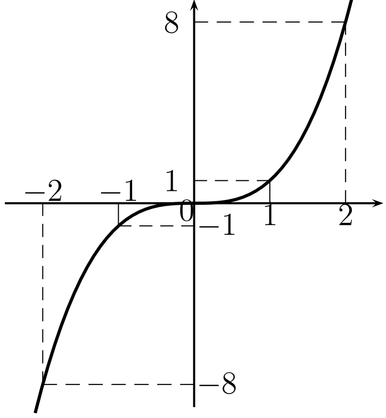
La fonction cube est la fonction f définie pour tout x réel par $\boxed{f(x) = x^3}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8



1.2.4 Fonction inverse

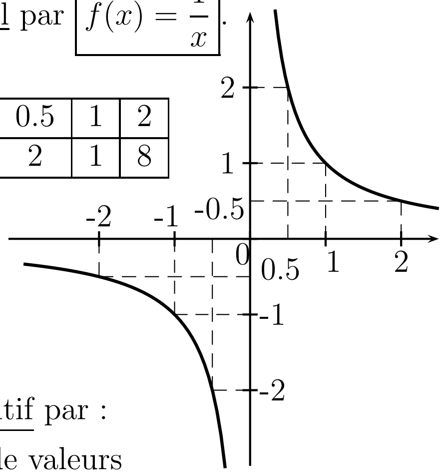
La fonction inverse est la fonction f définie pour x réel non nul par $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x}}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

Tableau de valeurs

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$f(x)$	-0.5	-1	-2	0	2	1	8



1.2.5 Fonction racine carrée

La fonction carré est la fonction f définie pour tout x réel positif par :

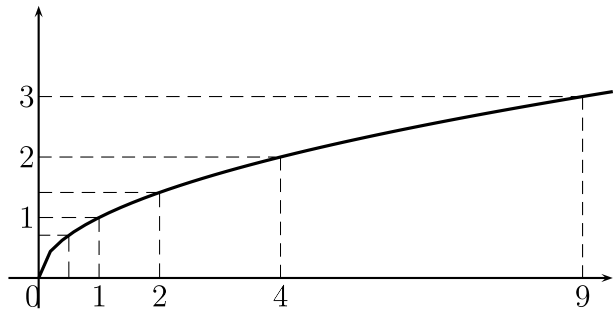
$\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$

Tableau de variations

x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	

Tableau de valeurs

x	0	0.5	1	2	4	9
$f(x)$	0	$\simeq 0.7$	1	2	$\simeq 1,4$	3



1.3 Fonction valeur absolue

Définition *Soit x un nombre réel ; on appelle* **valeur absolue** *de x, notée $|x|$ le nombre :*

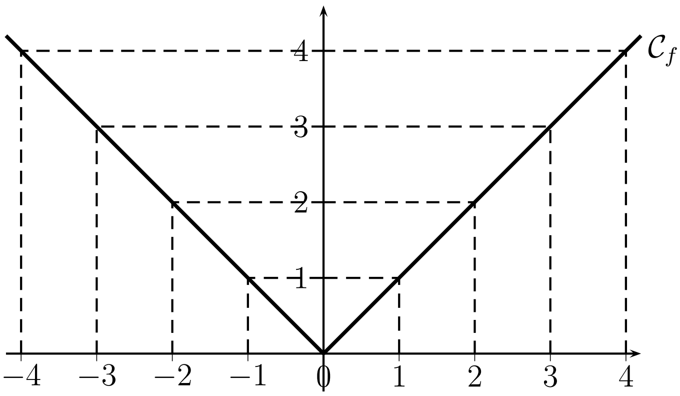
$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Ex : $|3| = 3$; $|-3| = -(-3) = 3$; $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2 \\ -(x-2) = -x+2 & \text{si} \quad x-2 \leqslant 0 \iff x \leqslant 2 \end{cases}$

Définition *La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = |x|$.*

Courbe représentative de la fonction valeur absolue

Si $x \geqslant 0$, $f(x) = |x| = x$, et si $x \leqslant 0$, $f(x) = |x| = -x$.
Ainsi, sur $]-\infty; 0]$, $\mathcal{C}_f$ est la demi-droite d'équation $y = -x$, tandis que sur $[0; +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est la demi-droite d'équation $y = x$.



Exercice 2 Tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-2|$.

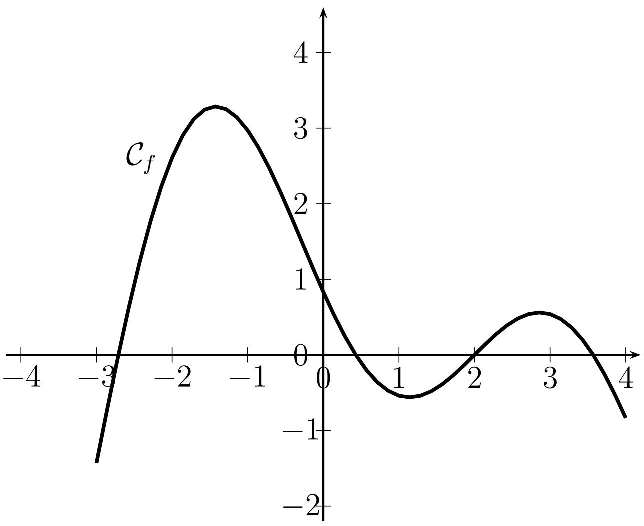
Exercice 3 Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$, et v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = |u(x)|$.

Représenter graphiquement u et v.

Exercice 4 Tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x|}$.

Exercice 5 Le graphique suivant donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3; 4]$.

Tracer sur le même graphique la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = |f(x)|$.



Exercice 6 Soit f une fonction dont on donne le tableau de variation :

x	-1		0		2		5
			1				7
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-2				-3		

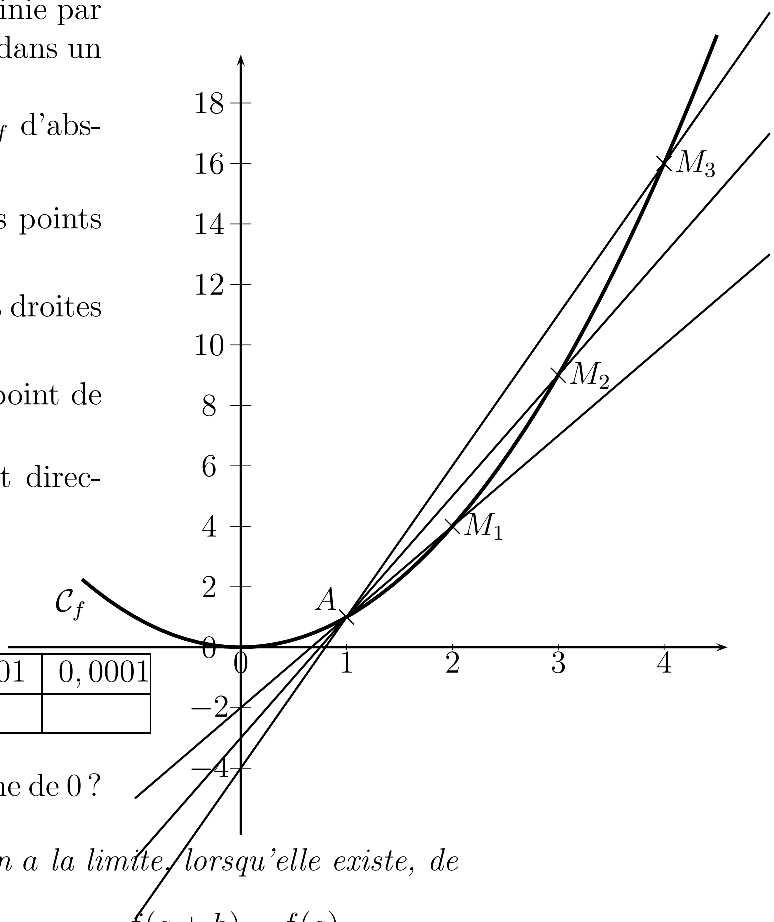
On sait de plus que f s'annule en $-0,3$, en 1 et en $4,2$.

Dresser le tableau de variation de la fonction g définie par $g(x) = |f(x)|$.

2 Nombre dérivé en a d'une fonction

Exercice 1 Soit f la fonction carré (définie par $f(x) = x^2$), et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On note A, M_1, M_2 et M_3 les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 1, 2, 3 et 4.

1. Tracer sur une figure $\mathcal{C}_f$ et placer les points A, M_1, M_2, M_3.
2. Calculer les coefficients directeurs des droites (AM_3), (AM_2) et (AM_1).
3. Soit un nombre réel $h > 0$, et M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $1 + h$.
   Donner une expression du coefficient directeur m_h de la droite (AM).
4. Compléter le tableau :



h	1	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001
m_h						

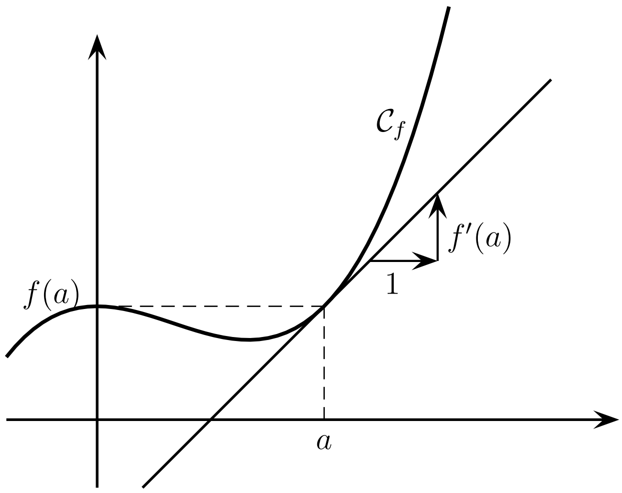
5. Que se passe-t-il lorsque h se rapproche de 0 ?

Définition • *On appelle nombre dérivé en a la limite, lorsqu'elle existe, de*

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

quand h se rapproche, ou tend vers, 0. On note ce nombre, lorqu'il existe, $f'(a)$.

• *Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.*



Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3$.

1. Tracer dans un repère orthogonal $\mathcal{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse $a = 1$.
   Déterminer alors graphiquement $f'(1)$.
2. a) Pour $h > 0$, on pose $m_h = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Compléter le tableau :

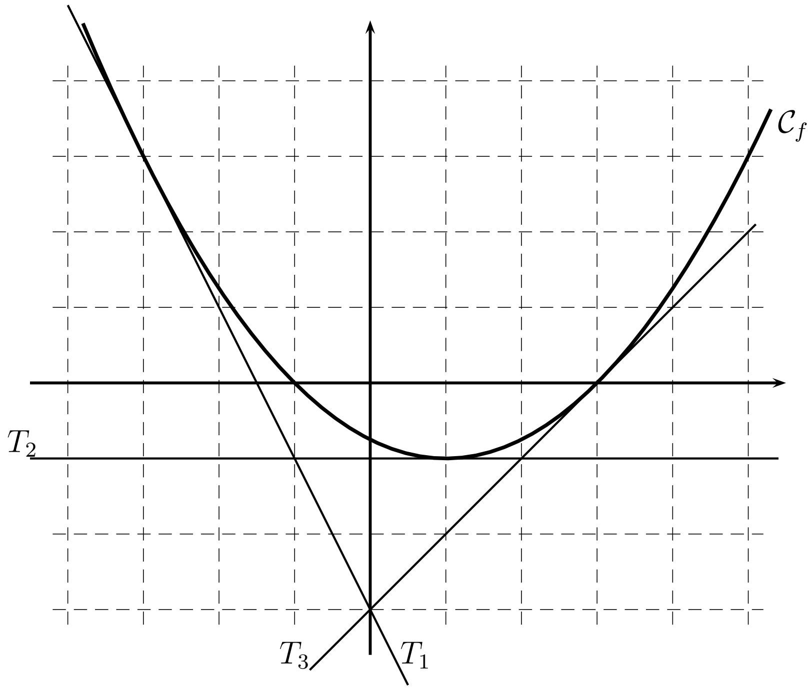
h	1	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
m_h						

Vers quoi tend le nombre a_h lorsque le nombre h tend vers 0 ?

b) Démontrer ce résultat algébriquement à partir de l'expression de m_h et de celle de f.

Exercice 3 $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f.
T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -3, 1 et 3.

Déterminer $f'(-3)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.



3 Fonction dérivée

Définition *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

- *On dit que f est dérivable sur I si f admet un nombre dérivé en tout point de I, c'est-à-dire si pour tout $a \in I$, $f'(a)$ existe.*
- *On appelle* **fonction dérivée** *de f la fonction notée f' qui, à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.*

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée	f est définie sur	f est dérivable sur
$f(x)=k$ (constante)	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$	
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$	
$f(x)=x^n \quad (n\in\mathbb{N})$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+=[0;+\infty[$	$\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$

Opérations sur les dérivées

u et v désignent deux fonctions quelconques, définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée
ku, $k\in\mathbb{R}$	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
$u^n \ (n\in\mathbb{N})$	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(v(x))$	$v'(x)\times u'(v(x))$

Exercice 1 Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x)=3$ b) $f(x)=3x$ c) $f(x)=\dfrac{5}{2}x$ d) $f(x)=x^2$

e) $f(x)=x^7$ f) $f(x)=2x^3$ g) $f(x)=3x+2$ h) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

i) $f(x)=-x^2+x-\dfrac{7}{2}$ j) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ k) $f(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{x+1}$ l) $f(x)=\dfrac{4}{x}$

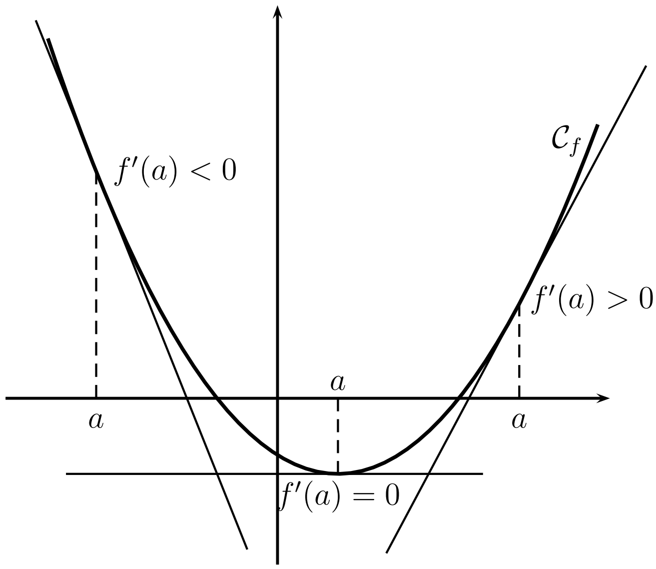
m) $f(x)=2x^5+\sqrt{x}$ n) $f(x)=(3x+2)x^2$ o) $f(x)=(-2x+1)(x+1)$ p) $f(x)=\dfrac{-2x+1}{(x+1)^2}$

4 Applications de la dérivation

4.1 Sens de variation d'une fonction

On a vu que le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a ; ainsi

- si $f'(a) > 0$, la tangente est une droite strictement croissante, et il en est de même de f "au voisinage" de a
- si $f'(a) < 0$, la tangente est une droite strictement décroissante, et il en est de même de f "au voisinage" de a



Théorème *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.*

Exercice 1 Dresser le tableau de variation des fonctions de l'exercice précédent de a) à l) et des fonctions suivantes :

q) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ r) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$ s) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ t) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{(x+1)^2}$

t) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 1$

4.2 Extrema d'une fonction

Définition *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

- *Un* **extremum** *est un minimum ou un maximum.*
- *f présente un* **maximum local** *$m = f(x_0)$ si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.*
- *f présente un* **minimum local** *$m = f(x_0)$ si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.*
- *L'extremum est dit* **global** *lorsque $J = I$.*

Théorème *Si $f(x_0)$ est un extremum local sur l'intervalle $]a;b[$, alors $f'(x_0) = 0$.*
La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f admet une tangente horizontale au point $(x_0\ ;\ f(x_0))$.

Remarque : Ce théorème dit que : $f(x_0)$ extremum local $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$.
La réciproque : $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f(x_0)$ extremum local est FAUSSE.

Par exemple, soit $f(x) = x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2$ et $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Ainsi, $f'(0) = 0$. Néanmoins $f(0)$ n'est ni un minimum ni un maximum local de f car pour $x < 0$, $f(x) = x^3 < 0 = f(0)$ et pour $x > 0$, $f(x) = x^3 > 0 = f(0)$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10$.
Rechercher les éventuels extrema locaux et globaux de f.

Exercice 3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Déterminer les coordonnés de l'extremum de f. Est-ce un minimum ou un maximum ?

Exercice 4 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6;4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f' :

x	-6		-2		1		4
f'	-1	↗	0	↗	4	↘	3

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 5 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6;4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f' :

x	-4		-1		1		2		4
f'	-7	↗	0	↘	-1	↗	0	↗	3

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 6 La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v, pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h, par l'expression

$$C(v) = 0,06v + \frac{150}{v} .$$

A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

4.3 Résolution d'équations

Théorème des valeurs intermédiaires
Soit k un nombre réel, f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ telle que

- *f est dérivable sur $[a;b]$*
- *f est strictement monotone sur $[a;b]$*
- *$f(a) < k < f(b)$ ou $f(a) > k > f(b)$*

alors, il existe un unique $\alpha \in]a;b[$ tel que $f(\alpha) = k$.

Exercice 7 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2;5]$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		4		5
f	1	↗	4	↘	-3	↗	10

Déterminer le nombre de solutions, et l'intervalle elles se situent, de l'équation
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = -5$

Exercice 8 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3;2]$.
Déterminer un encadrement plus précis de cette solution.

Exercice 9 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions, respectivement dans les intervalles $]-2;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;2[$.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la plus grande de ces solutions.