Résolution d'équations

I - Généralités

Définition *Résoudre l'équation $A(x) = 0$, c'est trouver* **<u>tous</u>** *les nombres x tels que $A(x) = 0$.*
x s'appelle l'inconnue de l'équation $A(x) = 0$.

<u>Exemple :</u> $A(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

Soit l'équation (E) : $A(x) = 0$, d'inconnue x.
Pour $x = 2$, on a : $A(2) = 2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 3 = 1 \neq 0$, donc $x = 2$ n'est pas une solution de (E).
Pour $x = 1$, on a $A(1) = 2 \times (1)^2 - 5 \times (1) + 3 = 0$, donc $x = 1$ est **<u>une</u>** solution de (E). On n'a pas pour autant résolu l'équation car il peut y avoir d'autres solutions.

Pour $x = \dfrac{3}{2}$, $A\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 5 \times \dfrac{3}{2} + 3 = \dfrac{9}{2} - \dfrac{15}{2} + 3 = -\dfrac{6}{2} + 3 = 0$, donc $x = \dfrac{3}{2}$ est **<u>une</u>** solution de (E). Il peut y en avoir d'autres...

Exercice 1 Soit l'expression algébrique : $A(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$. On note (E) l'équation $A(x) = 0$.

1. Calculer $A(0)$. $x = 0$ est-il une solution de (E) ?
2. Calculer $A(1)$. $x = 1$ est-il une solution de (E) ?
3. Calculer $A\left(\dfrac{1}{2}\right)$. $x = -\dfrac{1}{2}$ est-il une solution de (E) ?
4. A-t'on finalement résolu l'équation (E) ?

Exercice 2 On considère l'expression algébrique $B(x) = 3x^2 + 2x - 8$, et on note (E) l'équation $B(x) = 0$. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont solution de (E) : 0 ; 1 ; -2 ; 5 ; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{4}{3}$?

Exercice 3 On considère l'équation (E) : $x^2 - x - \dfrac{1}{4} = 0$.

Les valeurs suivantes sont-elles des solutions de (E) ? $x = 1$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, $x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}-2}$

II - Différents types d'équations

1) Eqation du premier degré

Propriété *Une équation du premier degré est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des nombres réels, et $a \neq 0$.*
L'unique solution de cette équation est $x = -\dfrac{b}{a}$.

<u>Exemple :</u> • L'équation $3x + 9 = 0$ a pour solution $x = -\dfrac{9}{3} = -3$.

• L'équation $2x + 1 = 0$ a pour solution $x = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 4 Résoudre les équations : (E_1) : $3x + 7 = 19$ $\quad$ (E_2) : $\dfrac{3}{2}x + 3 = 4$

(E_3) : $\dfrac{5}{3}x + 2 = \dfrac{3}{2}$ $\quad$ (E_4) : $\dfrac{x}{3} + 1 = 2x - 1$ $\quad$ (E_4) : $\dfrac{x}{3} - 1 = \dfrac{2x-3}{5}$

2) Equation produit nul

Théorème *Un produit de facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul :*

$$A(x)B(x)=0 \iff \begin{cases} A(x)=0 \\ ou \\ B(x)=0 \end{cases}$$

Exercice 5 Résoudre les équations :

(E_1) : $(2x-3)(4x-5)=0$ (E_2) : $(x-2)(2x+5)(-2x+1)=0$

(E_3) : $(2x+1)(x-3)+(x+6)(2x+1)=0$ (E_4) : $(x+5)(-2x+1)=(x+5)(x-2)$

(E_3) : $x^2-9=0$ (E_4) : $x^2=8$ (E_5) : $(2x+3)^2=(3x+2)^2$

3) Equation quotient nul

Théorème *Un quotient est nul si et seulement son dénominateur est non nul et son numérateur est nul :*

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \iff \begin{cases} B(x)\neq 0 \\ et \\ A(x)=0 \end{cases}$$

Exemple : (E) : $\dfrac{x-2}{x+1}=0$ équivaut à $x+1\neq 0$ et $x-2=0$, soit $x\neq -1$ et $x=2$.
L'équation (E) a donc une seule solution $x=2$.

Exercice 6 Résoudre les équations :

(E_1) : $\dfrac{x-3}{2x+1}=0$ (E_2) : $\dfrac{x^2-16}{2x+5}=0$ (E_3) : $\dfrac{2}{2x+5}-\dfrac{1}{4x-3}=0$

(E_4) : $3+\dfrac{1}{x-5}=0$ (E_5) : $\dfrac{2x+1}{x}=\dfrac{2x}{x+4}$

4) Equation $\Big[A(x)\Big]^2=a$

Propriété *Si $a<0$, l'équation $\Big[A(x)\Big]^2=a$ n'a pas de solution.*

*Si $a\geq 0$, alors l'équation $\Big[A(x)\Big]^2=a$ est équivalente à $A(x)=\sqrt{a}$ **ou** $A(x)=-\sqrt{a}$.*

Démonstration : Si $a\geq 0$, alors $\sqrt{a}$ existe et $\sqrt{a}^2=a$.
On a alors, $\Big[A(x)\Big]^2=a=\sqrt{a}^2 \iff \Big[A(x)\Big]^2-(\sqrt{a})^2=0 \iff \Big(A(x)-\sqrt{a}\Big)\Big(A(x)+\sqrt{a}\Big)=0.$
Ce produit de facteurs est nul si et seulement si $A(x)-\sqrt{a}=0$ ou $A(x)+\sqrt{a}=0$, soit, si $A(x)=\sqrt{a}$ ou $A(x)=-\sqrt{a}$.

Ex : $x^2=9$ a pour solutions $x=\sqrt{9}=3$ et $x=-\sqrt{9}=-3$.

Exercice 7 Résoudre les équations :

(E_1) : $2x^2=x^2+16$ (E_2) : $(x+2)^2=9$ (E_3) : $(2x-5)^2=49$ (E_4) : $(2x+3)^2=(x-4)^2$

$(E_5) : \left(\dfrac{25x^3+16x-7}{12x+3}\right)^2 = -6 \quad (E_6) : \left(x^2-10\right)^2 = 36 \ (E_7) : \left(x^2-17\right)^2 = 64$

Exercice 8
a) Montrer que l'équation $(E) : x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ est équivalente à $\left(x^2-13\right)^2 = 144$.

b) Résoudre alors (E).

5) Equation $\sqrt{A(x)} = b$

Propriété *Si $b \geq 0$, l'équation $\sqrt{A(x)} = b$ est équivalente à $A(x) = b^2$ et $A(x) \geqslant 0$.*

Si $b < 0$, l'équation $\sqrt{A(x)} = b$ n'a pas de solution.

Exemples : • L'équation $\sqrt{x} = 5$ a pour solution $x = 5^2 = 25$.

- L'équation $\sqrt{2x+1} = 3$ est équivalente à $2x+1 = 3^2 = 9$ et $2x+1 \geqslant 0$, soit $x = 4$.
- L'équation $\sqrt{3x^5 - 6x^3 + 3x^2 - 36} = -2$ n'a pas de solution car $-2 < 0$.
- Soit $(E) : \sqrt{x^2-13} = 6$.

On a : $(E) \iff \left\{\begin{array}{l} x^2-13 = 6^2 = 36 \\ x^2 - 13 \geqslant 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2 = 49 \\ x^2-13 \geqslant 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{49} = 7 \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{49} = -7 \end{array}\right. \\ x^2-13 \geqslant 0 \end{array}\right.$

On vérifie : pour $x = 7$, on a $x^2 - 13 = 49 - 13 = 36 \geqslant 0$ et pour $x = -7$, on a $x^2 - 13 = 36 \geqslant 0$.
Ainsi, (E) a deux solutions : $\mathcal{S} = \left\{-7; 7\right\}$.

- Soit $(E') : (x^2-16)\sqrt{x-3} = 0$. (E') est une équation produit nul :

$$(E') = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} x^2-16 = 0 \\ \text{ou} \\ \sqrt{x-3} = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2 = 16 \\ \text{ou} \\ \left\{\begin{array}{l} x-3 = 0 \\ \text{et} \\ x-3 \geqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ \text{ou} \\ x = -4 \end{array}\right. \\ \text{ou} \\ \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ \text{et} \\ x-3 \geqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Or, pour $x = -4$, on a $x - 3 = -7 < 0$, et donc $x = 4$ n'est pas solution de cette équation.
Ainsi, (E') a deux solutions : $\mathcal{S} = \left\{3; 4\right\}$.

Exercice 9 Résoudre les équations :

$(E_1)\ \sqrt{x+3} = 7 \qquad (E_2)\ \sqrt{2x+5} = 5 \qquad (E_3)\ \sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}} = -3$

$(E_4)\ \sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}} = 3 \qquad (E_5)\ \sqrt{\dfrac{2x^2+5x-2}{3x+1}} = -5 \qquad (E_6)\ \sqrt{x^2+x+1} = x.$

III - Equations du second degré

Définition • *On appelle équation du second degré toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, et c sont trois nombres réels quelconques, avec $a \neq 0$.*

• *Une forme canonique pour l'équation du second degré $ax^2+bx+c = 0$ est une expression dans laquelle n'apparaît qu'une seule fois l'inconnue x.*

Ex : • $x^2 + 2x + 1 = 0$ est une équation du second degré ($a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$),
et $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0$ est une forme canonique de cette équation.

• $x^2 + 2x + 3 = 0$ a pour forme canonique $x^2 + 2x + 3 = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2 = 0$.

Exercice 10 Mettre les expressions sous forme canonique :

$(E_1) : x^2 + 4x + 4 = 0$ $(E_2) : x^2 + 4x + 6 = 0$ $(E_3) : x^2 + 4x + 2 = 0$

$(E_4) : x^2 - 6x + 9 = 0$ $(E_5) : x^2 - 6x + 9 = 0$ $(E_6) : 2x^2 - 12x + 18 = 0$

Exercice 11 Mettre sous forme canonique puis résoudre les équations :

$(E_7) : x^2 - 6x + 9 = 0$ $(E_8) : x^2 - 6x + 5 = 0$

$(E_9) : x^2 + 8x + 16 = 0$ $(E_{10}) : x^2 + 8x + 7 = 0$

IV - Exercices

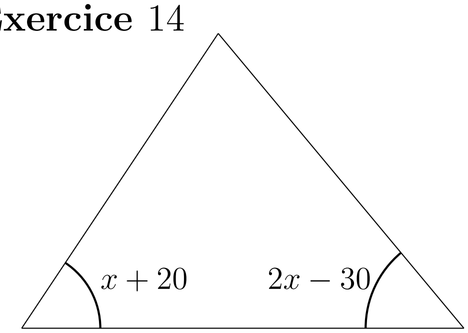
Exercice 12 Un producteur de tomates a vendu $\frac{3}{4}$ de sa récolte à une grande surface et 900 kg à des petits commerçants. Il lui reste 350 kg de tomates.

Quelle quantité de tomates a-t-il produit ?

Exercice 13 La durée T, en secondes, d'un battement d'un pendule de longueur L, en mètres, est donnée par la formule : $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}}$.

Calculer L, à 10^{-2} près, pour que la durée d'un battement soit de une seconde.

Exercice 14



Déterminer x (en degré) pour que ABC soit :

a) rectangle

b) isocèle

Exercice 15 Trouver trois nombres entiers consécutifs tels que leur somme soit égale à 261.

Exercice 16 Trouver cinq nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des trois autres.