Fonctions de référence

I Etude de fonctions

Définition: *Etudier une fonction f, c'est :*
- *déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$*
- *déterminer son sens de variation*
- *tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$, en exploitant son tableau de variation, et à l'aide d'un tableau de valeurs.*

II Fonctions affines

Rappel : Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet une expression de la forme $f(x) = ax + b$.

Ex : Etude de $f(x) = 2x + 1$

- Ensemble de définition : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- Sens de variation : Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$, alors $2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$, d'où $f(x_1) < f(x_2)$. On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- La courbe représentative de f est la droite d'équation $y = 2x + 1$.

Ex : Etude de $g(x) = -3x + 6$.

Propriété: *Soit f une fonction affine définie par l'expression $f(x) = ax + b$. Alors, si $a > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; tandis que si $a < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*

$a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f	↘	

$a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f	↗	

Ex : Etudier le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par $f(x) = 3x + 2$, puis tracer sa courbe représentative. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'inéquation $f(x) \leqslant 4$.

III Fonction inverse

Définition: *La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.*

Propriété: *La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Sa représentation graphique est une courbe $\mathcal{H}$ appelée hyperbole.*

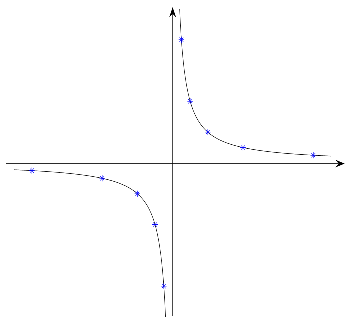
Démonstration :

Sens de variation : Soient x_1 et x_2 deux réels négatifs tels que $x_1 < x_2 < 0$ ...

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	‖	↘

Courbe représentative : Tableau de valeurs :

x	0,25	0,5	1	2	4
$f(x)$	4	2	1	0,5	0,25



Propriété: *Pour tout nombre réel x, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$: La fonction inverse est impaire : sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.*

Ex : Résoudre l'équation $\dfrac{1}{x} \leqslant 2$ en s'aidant de la courbe représentative de la fonction inverse.

Résoudre de même l'équation $\dfrac{1}{x} \geqslant 6$.

Ex : Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ lorsque : a) $x \in [1;2]$ b) $x \in]0;3[$ c) $x \in [-4;-1]$ d) $x \in]-1;1[$

IV Fonction racine carrée

1 Rappels : règles de calcul sur les racines carrées

Propriété: *Soit a et b deux nombres positifs, alors,*

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- *Si* $0 < a < b$, *alors* $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$

Mais, comme pour les identités remarquables, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Ex : • Soit $X = \sqrt{24} - \sqrt{6}$. Calculer X^2, puis en déduire la valeur de X.

• Soit $X = \sqrt{50} - \sqrt{8}$. Calculer X^2, puis en déduire la valeur de X.

Ex : Soit $X = \sqrt{10 - \sqrt{84}} + \sqrt{10 + \sqrt{84}}$.

- Calculer X à la calculatrice.
- Développer X^2, puis en déduire X, et retrouver le résultat précédent.
- Mêmes questions avec $Y = \sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ et $Z = \sqrt{15 - \sqrt{216}} + \sqrt{15 + \sqrt{216}}$.

Ex : Ecrire les fractions sans radical au dénominateur : $A = \dfrac{2}{\sqrt{8}}$, $B = \dfrac{3}{2+\sqrt{5}}$, $C = \dfrac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $D = \dfrac{3-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}$

Ex : Résoudre les systèmes :

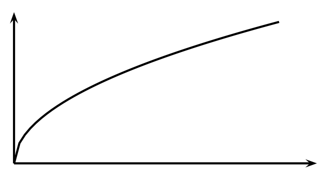
$$\left\{\begin{array}{rcrcr} \sqrt{3}\,x & - & y & = & 0 \\ 2\,x & + & \sqrt{3}\,y & = & 5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcr} 3\sqrt{2}\,x & + & \sqrt{8}y & = & 2 \\ \sqrt{8}\,x & - & \sqrt{2}\,y & = & -8 \end{array}\right.$$

2 Fonction racine carrée

Définition: *La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.*

D'après la propriété précédente, si $0 < a < b$, alors $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$, soit aussi, $0 < f(a) < f(b)$. On en déduit la propriété :

Propriété: *La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.*



V Fonction carré

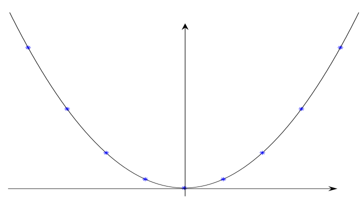
Définition: *La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.*

Propriété: *La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Sa représentation graphique dans un repère orthonormé est une courbe $\mathcal{P}$ appelée parabole.*

Démonstration :

Sens de variation : Soient a et b deux réels négatifs tels que $a < b \leq 0$, alors $a^2 > b^2$, soit aussi $f(a) > f(b)$: la fonction f est croissante sur $]-\infty;0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$



Courbe représentative : Tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

Propriété: *Pour tout nombre réel x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$: La fonction carré est paire : sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.*

Ex : Tracer la courbe représentative la fonction carré, et résoudre, en s'aidant de cette courbe, les équations :

a) $x^2 \leqslant 9$ b) $x^2 \leqslant 5$ c) $x^2 \geqslant 8$

Ex : Donner un encadrement de a^2 lorsque : 1) $a \in \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$ 2) $a \in [-2; -1]$ 3) $a \in [-1; 2]$

VI Fonction du second degré

Définition: *Un fonction du second degré est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, b et c sont trois nombres réels quelconques.*

Ex :
- $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ est une fonction du second degré, avec $a = 2$, $b = -5$ et $c = 2$.
- $f(x) = -3x^2 + x - 7$ est une fonction du second degré, avec $a = -3$, $b = 1$ et $c = -7$.
- $f(x) = -x^2 - \frac{3}{2}$ est une fonction du second degré, avec $a = -1$, $b = 0$ et $c = -\frac{3}{2}$.

Ex :
- Soit la fonction du second degré f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
  Montrer que pour tout x réel, $f(x) = (x - 1)^2 + 2$. En déduire le sens de variation et le minimum de f.
- Soit la fonction du second degré g définie par $g(x) = x^2 + 6x - 8$.
  Montrer que pour tout x réel, $g(x) = (x + 3)^2 - 17$. En déduire le sens de variation et le minimum de g.
- Soit la fonction du second degré h définie par $h(x) = 2x^2 + 12x + 10$.
  Montrer que pour tout x réel, $h(x) = 2(x + 3)^2 - 8$. En déduire le sens de variation et le minimum de h.
- Soit la fonction du second degré k définie par $k(x) = -2x^2 - 12x - 9$.
  Trouver trois nombres réels a, b, et c tels que, pour tout x, $k(x) = a(x + b)^2 + c$.
- Soit la fonction du second degré l définie par $l(x) = -2x^2 - 12x - 9$.
  Trouver trois nombres réels a, b, et c tels que, pour tout x, $l(x) = a(x + b)^2 + c$.

Propriété: *Soit f une fonction du second degré définie par l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, b et c trois nombres réels quelconques, alors, pour tout nombre réel x, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, et donc,*

$a > 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	

$a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Ex : Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g définies par : $f(x) = 4x^2 + 16x - 6$ et $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$.
Déterminer, graphiquement puis par le calcul, les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

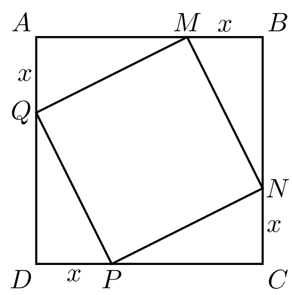
Ex : Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = ax^2 + bx + 2$, où a et b sont des nombres réels à déterminer, et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

On sait de plus que les points $A(1; -1)$ et $B(4; 2)$ appartiennent à $\mathcal{C}_f$.
a) Déterminer a et b, et l'expression de f.
b) Dresser le tableau de variation de f et en déduire son minimum.
c) Tracer $\mathcal{C}_f$.

Ex : Chaque jour une entreprise fabrique un nombre x d'objets, compris entre 0 et 50.

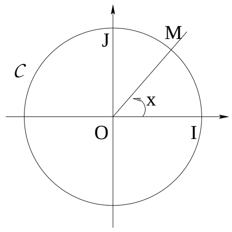
Le coût de production des objets est donnée, en euros, par $C(x) = 60 - 0,3x$, tandis que le revenu de la vente de ces x objets est, en euros, $R(x) = 20,1x - 0,3x^2$.
a) Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de x.
b) Quel est le bénéfice maximal que espérer l'entreprise ?

Ex : Dans un carré $ABCD$ de côté 20 cm, on inscrit un carré $MNPQ$ tel que $x = MB = NC = PD = QA$.
On cherche la valeur de x pour que le carré $MNPQ$ ait une aire minimale.
1) *(Facultative)* Quelle est l'aire du carré $MNPQ$ si $x = 5$ cm ? si $x = 12$ cm ?
2) Exprimer l'aire $A(x)$ de $MNPQ$ en fonction de x.
Dresser le tableau de variation de $A(x)$ et conclure.



VII Fonctions cosinus et sinus

Définition: *Dans un repère othonormal $(O;I;J)$, un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 s'appelle un cercle trigonométrique.*



Soit M un point de $\mathcal{C}$, avec $x = \widehat{IOM}$.
La longueur de l'arc IM est, en fonction de x :

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & ? \\ 360 & \longrightarrow & 2\pi \end{array}$$

Donc, la longueur de l'arc IM est $x \times \dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{180}$.

Définition: *Pour un point M du cercle trigonométrique, on appelle angle en radian la longueur de l'arc IM. Si $x = \widehat{IOM}$ est la mesure de cet angle en degré, alors la mesure en radian est $x \times \dfrac{\pi}{180}$.*

angle en degré	0	30	45	60	90	180	360
angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Définition: *On dit qu'une fonction est périodique de période T si pour tout x on a : $f(x+T) = f(x)$.*

Propriété: *Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.*
Pour tout x, $\cos(-x) = \cos x$: la fonction cosinus est paire.
Pour tout x, $\sin(-x) = -\sin x$: la fonction sinus est impaire.

Propriété: *Pour tout nombre x :*
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ *et* $-1 \leq \sin x \leq 1$

Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0