2nde

Détermination du milieu d'un segment au compas

Euclide (mathématicien de la Grèce antique, environ IIIe S. av. J.C.) a fondé sa géométrie sur un système d'axiomes qui assure en particulier qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés et qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné. La géométrie euclidienne est donc la géométrie des droites et des cercles, donc de la règle et du compas. L'intuition d'Euclide était que tout nombre pouvait être construit, ou "obtenu", à l'aide de ces deux instruments.

On sait maintenant, après notamment l'important développement qu'a connu l'algèbre dans le courant du XIXe siècle, que la règle et le compas ne suffisent pas à réaliser toutes les constructions géométriques (des problèmes tels que la quadrature du cercle, la duplication du cube ou encore la trisection d'un angle, en sont des exemples célèbres).

Par contre, avant même ces résultats, Georg Mohr au XVIIe S. et Lorenzo Mascheroni à la fin du XVIIIe S. ont établi que si une construction pouvait être réalisée à la règle et au compas, alors l'usage de la règle était même superflu.

On sait bien déterminer le milieu d'un segment à l'aide uniquement d'une règle (non graduée) et d'un compas.

Le but de l'exercice suivant est de déterminer ce milieu au compas seul.

1) Soit A et B deux points quelconques du plan. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon AB.

   Soit A_1 un point d'intersection du cercle de centre A et de rayon AB, A_2 l'intersection du cercle de centre A_1 et de rayon AB, et enfin A' l'intersection du cercle de centre A_2 et de rayon AB.

   a) Que peut-on dire des triangles ABA_1, A_1BA_2 et A_2BA' ?

   b) En déduire la valeur de l'angle ABA'. Que peut-on alors dire des points A, B et A' ?

   c) Exprimer la longueur BA' en fonction de la longueur AB.

   d) Que peut-on finalement en conclure quant aux points A et A' ?

2) Soit D et D' les points d'intersection des cercles de centre A et de rayon AB et de centre A' et de rayon AA', et H le point d'intersection des droites (DD') et (AB).

   Que peut-on dire des distances DA et $D'A$? Que peut-on en conclure quant au point A ?

   Reprendre ce raisonnement avec le point A', et en conclure que les droites (DD') et (AB) sont perpendiculaires.

   a) Construire au compas le point C symétrique de A par rapport à A'.

      Que peut-on dire des triangles ADC et $AD'C$?

   b) Exprimer la longueur AC en fonction de la longueur AB.

   c) En exprimant de deux manières différentes $\cos\widehat{DAC}$, montrer que $AD^2 = AH \times AC$.

      Exprimer alors AH en fonction de AD et AB.

3) Soit M le point d'intersection des cercles de centre D et D' et de rayon $AD = AD'$.

   a) Quelle est la nature des triangles ADM et $AD'M$? Que représente la droite (DH) dans ces triangles ?

      En déduire AM en fonction de AH.

   b) Déduire de ce qui précède que le point M est le milieu de $[AB]$.