2^{nde}

Statistiques descriptives

Série 1 :

Elèves	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
Notes1	15	10	12	8	10	18	12	8	8	15	10	8	6	18	12	8	12

Série 2 :

Elèves	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
Taille(m)	1,71	1,78	1,82	1,72	1,54	1,61	1,84	1,79	1,73	1,60	1,57	1,79	1,74	1,88	1,65	1,76	1,70

I Vocabulaire des statistiques

Définition: *Un caractère, ou variable, est une propriété commune aux individus d'une population.*

Le caractère peut-être soit discret, quand il ne prend que des valeurs isolées, soit continu lorsqu'il peut prendre toutes les valeurs dans des intervalles appelés classes..

L'effectif d'une valeur d'un caractère est le nombre d'individus ayant cette valeur.

Ex : Population : élèves d'une classe ; Caractère : notes (discret) ou tailles (continu).

Série 1 :

Notes x_i	6	8	10	12	15	18
Nombre d'élèves n_i	1	5	3	4	2	2

Série 2 :

Tailles (m)	$[1,5;1,6[$	$[1,6;1,7[$	$[1,7;1,75[$	$[1,75;1,8[$	$[1,8;1,9[$
Effectifs n_i	2	3	5	4	3

Définition: *Une série statistique est l'ensemble des résultats d'une étude, c'est-à-dire des valeurs prises par le caractère et les effectifs correspondants.*

L'objectif des statistiques descriptives est de fournir des outils pour **décrire efficacement** *de* **grandes** *séries statistiques.*

II Caractéristique d'une série

Une série statistique se présente génrélament de la manière suivante :

Valeur du caractère	x_1	x_2	x_3	...	x_p
Effectifs	n_1	n_2	n_3	...	n_p

L'effectif total de cette série est : $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$.

Définition: *1) Caractéristique de position*

- *Le mode (ou la classe modale) est la valeur (ou la classe) qui correspond au plus grand effectif.*
- *La médiane d'une série dont les valeurs sont rangées par ordre croissant est la valeur qui partage la population en deux groupes de même effectif.*
  On la note M_e.
- *La moyenne arithmétique pondérée, notée $\overline{x}$, est définie par :* $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{N}$,
  ce qui s'écrit aussi $\overline{x} = \dfrac{1}{N} \times \displaystyle\sum_{i=1}^{i=k} n_ix_i$.

2) Caractéristique de dispersion L'étendue d'une série est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur du caractère.

Ex :

Série 1 : Le mode est 8 ; la médiane est la $9^{\text{ième}}$ note, soit $M_e = 10$; la moyenne est

$$\overline{x} = \frac{1}{17}(1\times 6 + 5\times 8 + 3\times 10 + 4\times 12 + 2\times 15 + 2\times 18) \sim 11,18$$

L'étendue de la série est $18 - 6 = 12$.

Série 2 : La classe modale est $[1,7;1,75[$; la classe de la médiane est $[1,7;1,75[$.

On calcule la moyenne à partir du centre des classes :

$$\overline{x} = \frac{1}{17} \times (2 \times 1,55 + 3 \times 1,65 + 5 \times 1,725 + 4 \times 1,775 + 3 \times 1,85) = 1,725$$

III Propriété de la moyenne

Prop.: *Soit $\overline{x}$ la moyenne d'une série d'effectif total N, de valeurs x_i et d'effectifs correspondants n_i pour i variant de 1 à k.*

1. *Si $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$ sont les moyennes de deux sous-groupes de la série d'effectifs respectifs N_1 et N_2, alors :*

$$\overline{x} = \frac{N_1\overline{x_1} + N_2\overline{x_2}}{N}$$

2. *La moyenne de la série de valeurs $ax_i + b$, où a et b sont des nombres réels, de mêmes effectifs n_i, pour i variant de 1 à k, est égale à : $a\overline{x} + b$.*

Ex : Série 1 : Il y a 6 élèves qui ont une note inférieure à 10 ; la moyenne de ces élèves est :
$\overline{x_1} = \frac{1}{6}(1 \times 6 + 5 \times 8) \sim 7,67$.
11 élèves ont une note supérieure ou égale à 10 ; la moyenne de ces élèves est :
$\overline{x_2} = \frac{1}{11}(3 \times 10 + 4 \times 12 + 2 \times 15 + 2 \times 18) \sim 13,09$.
La moyenne de la classe est alors la moyenne pondérée de ces deux sous-groupes :
$\overline{x} = \frac{1}{17} \times (6 \times \overline{x_1} + 11 \times \overline{x_2}) \sim 11,18$

Ex 2 : Dans une classe de 32 élèves, les filles, au nombre de 15, ont une taille moyenne de $1,63$ m, tandis que les garçons ont une taille moyenne de $1,75$ m.
Calculer la taille moyenne des élèves (rép. $\sim 1,69$ m).

Ex 3 : Dans une entreprise, le salaire moyen est de 1300 euros.
La direction décide d'accorder à tous les employés une augmentation de 2% et une prime de 10 euros.
Tous les salaires sont donc multipliés par $1,02$ et augmentés de 10 euros.
Calculer le nouveau salaire moyen. ($1,02 \times 1300 + 10 = 1336$ euros)

IV Fréquence des valeurs d'une série statistique

Définition: *La fréquence f_i de la valeur x_i du caractère est égale au quotient de l'effectif n_i par l'effectif total : $f_i = \frac{n_i}{N}$*

Ex : Etude du nombre de garçons et de filles dans une classe :

	Garçons	Filles
Effectifs	14	20
Fréquences	$\frac{14}{34} = \frac{7}{17} \sim 0,41$	$\frac{20}{34} = \frac{10}{17} \sim 0,59$
Pourcentages	$\sim 41\%$	$\sim 59\%$

Prop.: *La somme des fréquence d'une série statistique est égale à 1.*

Démonstration : $f_1 + f_2 + \ldots + f_p = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \ldots + \frac{n_p}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}{N} = \frac{N}{N} = 1$

Prop.: *La moyenne d'une série statistique dont le caractère prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_p avec les fréquences f_1, f_2, ..., f_p est $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_px_p$*

Démonstration : $\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{N} = \frac{n_1}{N}x_1 + \frac{n_2}{N}x_2 + \ldots + \frac{n_p}{N}x_p = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_px_p$

Ex :

Valeur du caractère	-5	3	8
Fréquence	0,2	0,3	0,5

$\overline{x} = 0,2 \times (-5) + 0,3 \times 3 + 0,5 \times 8 = 3,9$

Pourcentages d'évolutions :

- Un article coûte 24€. On lui applique une augmentation de 5 %. Calculer son nouveau prix.

• Un article coûte initialement 112 €. Calculer son nouveau prix, après une réduction de 20 %.

Prop.: *Augmenter une quantité de $t\,\%$ revient à multiplier cette quantité par $(1+t\,\%)$.*
Diminuer une quantité de $t\,\%$ revient à multiplier cette quantité par $(1-t\,\%)$.

• Un article coûte 25 €. Le vendeur décide de l'augmenter successivement de 10 %, puis de 15 %, et finalement de le diminuer de 25 %.
Quel est le prix final de cet article ?

• Après une réduction de 15 %, un article coûte 32 €.
Quel était son prix initial ?

Effet de structure • Lors d'un discours au cours duquel il a donné les résultats des examens de fin d'études des deux universités du pays, le dictateur dirigeant le pays a déclaré :
"Dans l'université du Nord, 82 % des garçons et 80 % des filles ont réussi.
Dans l'université du Sud, 56 % des garçons et 52 % des filles ont réussi.
Je ne suis pas sexiste, mais il faut bien reconnaître que dans notre pays, les garçons réussissent mieux que les filles."

Compléter le tableau :

	Garçons		Filles	
	Total	Admis	Total	Admises
Université du Nord	**500**	410	**500**	400
Université du Sud	**800**	448	**200**	104
Total	1300	858, soit 66 % des garçons	700	504, soit 72 % des filles

Calculer les proportions de filles et de garçons qui ont réussi dans le pays.
La conclusion du dictateur est-elle exacte ?

• Le tableau ci-dessous donne la répartition en 2005 et 2010 des ouvriers et cadres dans une entreprise, ainsi que le salaire de chacun.

	2005		2010	
	Effectifs	Salaires	Effectifs	Salaires
Cadres	**30**	**2500**	**20**	**2600**
Ouvriers	**40**	**1200**	**50**	**1300**
Total	70	123 000	70	117 000

Le directeur affirme : *"dans mon entreprise, en 5 ans, tous les salaires ont augmenté, ceux des cadres et ceux des ouvriers".*

Le responsable syndical affirme : *"dans l'entreprise, en 5 ans, le salaire moyen a diminué."*

Qui a raison ?

Calculer le pourcentage d'évolution (augmentation ou diminution) du salaire des cadres, du salaire des ouvriers, et du salaire moyen entre 2005 et 2010.

Définition: **Effet de structure** *(D'après l'INSEE, Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques)*
Lorsqu'une population est répartie en sous-populations, il peut arriver qu'une grandeur évolue dans un sens pour chaque sous-population et dans le sens contraire sur l'ensemble de la population.
Ce paradoxe s'explique parce que les effectifs de certaines sous-populations augmentent alors que d'autres régressent : c'est l'effet de structure.

V Probabilités

On connaît la frayeur de ce malade qui, sur le point de subir une intervention chirurgicale, demande :
- Docteur, combien a-t-on de chances de se tirer de là ?
- 99 pour cent.
- Et vous avez déjà réussi beaucoup d'opérations comme celle-là ?
- 99.

Jean-Louis Boursin, Les structures du hasard. Les probabilités et leurs usages

1 Vocabulaire des probabilités

Définition:
- *Une* **expérience** *est dite* **aléatoire** *lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats) possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.*
- *On appelle univers, noté en général Ω, l'ensemble des issues ou résultats possibles d'une expérience aléatoire.*
- *Un* **événement** *est une partie de l'univers, c'est-à-dire un ensemble de résultats possibles.*
- *Un* **évènement élémentaire** *est un évènement qui ne contient qu'un seul élément.*

Ex : On lance un dé à six faces et on s'intéresse au nombre obtenu sur la face supérieure.
Les résultats possibles sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
L'univers est l'ensemble des six résultats : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
"Obtenir un 6", "Obtenir un nombre pair", et "Obtenir un nombre supérieur ou égal à 4" sont des événements qui peuvent s'écrire $E_1 = \{6\}$, $E_2 = \{2, 4, 6\}$ et $E_3 = \{4, 5, 6\}$.
E_1 est de plus un événement élémentaire.

Ex : On tire une carte "au hasard" dans un jeu de 32 cartes.
L'univers est constitué de 32 événements élémentaires.

L'événement : E="Tirer un roi" est-il un événement élémentaire ?

Définition: *La* **probabilité d'un événement** *est un nombre qui mesure les "chances" que cet événement a de se produire sur une échelle de 0 (événement impossible) à 1 (événement certain).*
Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

Définition: *Soit $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$ l'univers des possibilités d'une épreuve aléatoire, où chaque e_i désigne une issue (ou évènement élémentaire).*

Définir une **loi de probabilité** *sur l'univers Ω c'est associer à chaque issue e_i un nombre réel p_i tel que : $0 \leq p_i \leq 1$ et $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.*

Le nombre p_i est la **probabilité** *de l'évènement e_i.*

Prop.: Loi des grands nombres
Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences obtenues sur des séries de taille n se rapprochent de P quand n devient grand.

Sur n=100 expériences de lancer d'un dé non pipé, on a obtenu 18 fois le chiffre 6 ; sur n=1000 lancers on a obtenu 169 fois le chiffre 6.
Lorsqu'on augmente le nombre n d'expérience réalisées, la fréquence d'apparition du chiffre 6 tend vers la probabilité qui est de $\frac{1}{6}$.

Définition: *On dit qu'il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.*

Ex : Dans le cas du lancer de dé, l'univers est composé exactement des six événements élémentaires : $e_1 = \{1\}$, $e_2 = \{2\}$, $e_3 = \{3\}$, $e_4 = \{4\}$, $e_5 = \{5\}$, $e_6 = \{6\}$.
Si le dé n'est pas truqué, chaque événement a la même probabilité p :
$p = P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = P(e_4) = P(e_5) = P(e_6)$.

Comme par ailleurs $P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + P(e_4) + P(e_5) + P(e_6) = 6p = 1$, on a donc
$p = P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = P(e_4) = P(e_5) = P(e_6) = \frac{1}{6}$.

Prop.: *La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires composant A.*

Ex : Dans l'expérience de lancer de dé, on considère l'événement A="obtenir un nombre pair". Alors $A = \{2, 4, 6\}$ et A est constitué des événements élémentaires $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$.

La probabilité de A est donc : $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$

Prop.: *Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :*

$$\boxed{P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}}$$

Exercice 1 Une personnes pressée répond à un sondage. Deux questions sont posées et, à chacune, on donne le choix entre *"favorable"* , *"opposé"* et *"sans opinion"*.

De combien de façons la personne peut-elle répondre au sondage ?

Exercice 2 Dans une interrogation écrite, la consigne est la suivante : *"Pour chacune des quatre affirmations, répondre par Vrai ou Faux"*.
Un élève qui ne sait pas sa leçon, décide de cocher une case au hasard pour chaque affirmation.
De combien de façons peut-il remplir sa feuille ?
Sachant qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte à chaque affirmation, quelle probabilité a-t-il de faire tout juste ?

Exercice 3 A la rentrée, dans une classe de 28 élèves, le professeur principal désigne au hasard un couple d'élèves pour être délégués provisoires.
Combien y-a-t-il de couples différents possibles ?

Il y a dans cette 13 filles et 15 garçons. Le professeur doit en fait désigner un couple garçon - fille. Combien y-a-t-il de couples différents possibles ?

Exercice 4 Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. On considère les évènements A : *"tirer un roi"* et B : *"tirer un cœur"*.
a) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
b) Quels sont les évènements élémentaires qui composent l'évènement A ? l'évènemennt B ?
En déduire les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.

Exercice 5 On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 deux fois successivement, puis on ajoute les chiffres obtenus aux deux lancés.
Faire un arbre représentant tous les évènements possibles (1^{er} lancer et $2^{ème}$ lancer).
a) Combien y-a-t-il d'issues possibles ?
b) Combien de façons a-t-on d'obtenir la somme 4 ? la somme 7 ?
c) En déduire les probabilités $P(4)$ et $P(13)$.