Probabilités

2^{nde}

On connaît la frayeur de ce malade qui, sur le point de subir une intervention chirurgicale, demande :
- Docteur, combien a-t-on de chances de se tirer de là ?
- 99 pour cent.
- Et vous avez déjà réussi beaucoup d'opérations comme celle-là ?
- 99.

Jean-Louis Boursin, Les structures du hasard. Les probabilités et leurs usages

Tout est prévu, tout est réglé : notre ignorance seule seule nous porte à croire que tout est abondonné au hasard.

Adolphe Quételet

I Vocabulaire des probabilités

Définition:

- *Une* **expérience** *est dite* **aléatoire** *lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats) possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.*
- *On appelle univers, noté en général Ω, l'ensemble des issues ou résultats possibles d'une expérience aléatoire.*
- *Un* **événement** *est une partie de l'univers, c'est-à-dire un ensemble de résultats possibles.*
- *Un* **évènement élémentaire** *est un évènement qui ne contient qu'un seul élément.*

Ex : On lance un dé à six faces et on s'intéresse au nombre obtenu sur la face supérieure.
Les résultats possibles sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
L'univers est l'ensemble des six résultats : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
"Obtenir un 6", "Obtenir un nombre pair", et "Obtenir un nombre supérieur ou égal à 4" sont des événements qui peuvent s'écrire $E_1 = \{6\}$, $E_2 = \{2, 4, 6\}$ et $E_3 = \{4, 5, 6\}$.
E_1 est de plus un événement élémentaire.

Ex : On tire une carte "au hasard" dans un jeu de 32 cartes.
L'univers est constitué de 32 événements élémentaires.

L'événement : E="Tirer un roi" est-il un événement élémentaire ?

Définition: *La* **probabilité d'un événement** *est un nombre qui mesure les "chances" que cet événement a de se produire sur une échelle de 0 (événement impossible) à 1 (événement certain).*
Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

Définition: *Soit $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ l'univers des possibilités d'une épreuve aléatoire, où chaque e_i désigne une issue (ou évènement élémentaire).*

Définir une **loi de probabilité** *sur l'univers Ω c'est associer à chaque issue e_i un nombre réel p_i tel que : $0 \leq p_i \leq 1$ et $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.*

Le nombre p_i est la **probabilité** *de l'évènement e_i.*

Prop.: Loi des grands nombres
Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences obtenues sur des séries de taille n se rapprochent de P quand n devient grand.

Sur n=100 expériences de lancer d'un dé non pipé, on a obtenu 18 fois le chiffre 6 ; sur n=1000 lancers on a obtenu 169 fois le chiffre 6.
Lorsqu'on augmente le nombre n d'expérience réalisées, la fréquence d'apparition du chiffre 6 tend vers la probabilité qui est de $\frac{1}{6}$.

II Calcul de probabilités

Définition: *On dit qu'il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.*

Ex : Dans le cas du lancer de dé, l'univers est composé exactement des six événements élémentaires : $e_1 = \{1\}$, $e_2 = \{2\}$, $e_3 = \{3\}$, $e_4 = \{4\}$, $e_5 = \{5\}$, $e_6 = \{6\}$.
Si le dé n'est pas truqué, chaque événement a la même probabilité p :
$p = P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = P(e_4) = P(e_5) = P(e_6)$.

Comme par ailleurs $P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + P(e_4) + P(e_5) + P(e_6) = 6p = 1$, on a donc
$p = P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = P(e_4) = P(e_5) = P(e_6) = \frac{1}{6}$.

Prop.: *La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires composant A.*

Ex : Dans l'expérience de lancer de dé, on considère l'événement A="obtenir un nombre pair". Alors $A = \{2, 4, 6\}$ et A est constitué des événements élémentaires $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$.
La probabilité de A est donc : $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Prop.: *Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :*

$$\boxed{P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}}$$

Exercice 1 Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. On considère les évènements A : *"tirer un roi"* et B : *"tirer un cœur"*.

a) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

b) Quels sont les évènements élémentaires qui composent l'évènement A ? l'évènemennt B ?
En déduire les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.

Exercice 2 Une personnes pressée répond à un sondage. Deux questions sont posées et, à chacune, on donne le choix entre *"favorable"* , *"opposé"* et *"sans opinion"*.

De combien de façons la personne peut-elle répondre au sondage ?

Exercice 3 Dans une interrogation écrite, la consigne est la suivante : *"Pour chacune des quatre affirmations, répondre par Vrai ou Faux"*.

Un élève qui ne sait pas sa leçon décide de répondre à toutes les questions en cochant une case au hasard pour chaque affirmation.

De combien de façons peut-il remplir sa feuille ?

Sachant qu'il n'y a qu'une seule réponse exacte à chaque affirmation, quelle probabilité a-t-il de faire tout juste ?

Exercice 4 A la rentrée, dans une classe de 28 élèves, le professeur principal désigne au hasard un couple d'élèves pour être délégués provisoires.
Combien y-a-t-il de couples différents possibles ?

Il y a dans cette classe 13 filles et 15 garçons. Le professeur doit en fait désigner un couple garçon - fille. Combien y-a-t-il de couples différents possibles ?

Exercice 5 On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6 deux fois successivement, puis on ajoute les chiffres obtenus aux deux lancés.
Faire un arbre représentant tous les évènements possibles (1$^{\text{er}}$ lancer et 2$^{\text{ème}}$ lancer).

a) Combien y-a-t-il d'issues possibles ?

b) Combien de façons a-t-on d'obtenir la somme 4 ? la somme 7 ?

c) En déduire les probabilités $P(4)$ et $P(7)$.

Exercice 6 Le plan est muni d'un repère orthonormal. On choisit au hasard un point dont les coordonnées sont des nombres entiers compris entre 0 et 5.
Tracer dans ce repère la droite d'équation $D : y = x$.
Combien peut-on choisir de points différents ?
Quelle est la probabilité pour que le point choisi soit sur la droite D.

Exercice 7 *Paradoxe de Condorcet*
Une urne U_1 contient trois boules numérotées 1, 6 et 8. Une urne U_2 contient trois boules numérotées 2, 4 et 9. Une urne U_3 contient trois boules numérotées 3, 5 et 7.
Justine joue avec l'urne U_1, Alice avec l'urne U_2 et Mathilde avec l'urne U_3. Le jeu se joue à deux, chaque joueur prend au hasard une boule dans l'urne ; le gagnant est celui qui a le plus grand numéro.

1. Combien peut espérer tirer, en moyenne, chaque joueur ?
2. Justine joue contre Alice. Laquelle des deux a le plus de chance de gagner ?
(dresser un arbre ou un tableau décrivant les couples de résultats possibles).
3. Alice joue contre Mathilde. Qui a le plus de chance de gagner ?
4. Enfin, Mathilde joue contre Justine. Qui a le plus de chance de gagner ?

Exercice 8 *Mot de passe*
Un mot de passe est constitué de 8 caractères suivant :
– les 2 premiers caractères sont des chiffres ;
– les 6 caractères suivants sont des lettres de l'alphabet.

1. Combien de mots de passe différents est-il possible de constituer ?
2. Quelle est la probabilité de trouver au hasard le mot de passe d'une personne ?
3. Un système informatique permet de tester, l'un après l'autre, l'ensemble des mots de passe. Il faut $0,1$ seconde pour tester un mot de passe.
Combien de temps faudra-t'il pour tester l'ensemble des mots de passe possible ?

Exercice 9 Deux grossistes produisent des bulbes de tulipes :
– le premier : des bulbes à fleurs rouges, dont 90% donnent une fleur ;
– le deuxième : des bulbes à fleurs jaunes, dont 80% donnent une fleur ;
Un horticulteur achète 70% des bulbes qu'il cultive au premier grossiste et le reste au second. Il plante un bulbe au hasard ; quelle est la probabilité :

1. d'obtenir une fleur rouge ?
2. d'obenir une fleur jaune ?
3. de ne pas obtenir de fleur ?

Exercice 10 *Météo probabiliste simplifiée*
Un modèle simplifié de l'évolution des conditions météorologiques consiste à classer le temps en 3 catégories : "Beau", "Variable" et "Mauvais".

Le tableau suivant fournit la probabilité d'avoir un temps donné le lendemain en fonction du temps du jour même.

2ème jour / 1er jour	Beau	Variable	Mauvais
Beau	0,6	0,3	0,1
Variable	0,3	0,4	0,3
Mauvais	0,1	0,3	0,6

Nous somme lundi et il fait beau. Quelle est la probabilité pour qu'il fasse beau :

1. mardi ?
2. mercredi ?
3. mardi ou mercredi ?
4. de mardi à dimanche prochain ?

Exercice 11 On lance 3 pièces de monnaie. Quelle est la probabilité qu'elles retombent toutes sur la même face ?

Exercice 12 On lance trois fois de suite un dé équilibré à six faces. Quelle est la probabilité que les chiffres obtenus forment une suite croissante ?

Exercice 13 Un square est équipé de 3 bancs à 2 places. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. Quelle est la probabilité que ces deux personnes s'installent côte à côte ?

III Opérations sur les événements et probabilités

Définition: *Soit A et B deux événements.*

- *La* **réunion** *de A et B est l'événement, noté $A \cup B$, contenant les éléments de A et ceux de B.*
- *L'***intersection** *de A et B est l'événnement, noté $A \cap B$, contenant les éléments* **à la fois** *de A et de B.*
- *Deux événements A et B sont* **incompatibles** *lorsque $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire lorsque les événements A et B n'ont aucune issue en commun.*

Exercice 14 On tire au hasard un nombre entier entre 1 et 10. On considère les événements :
A :"Le nombre tiré est pair"
B :"Le nombre tiré est un multiple de 5"
Alors $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ et $B = \{5; 10\}$.
On a donc, $A \cap B = \{10\}$ et $A \cup B = \{2; 4; 5; 6; 8; 10\}$.

Exercice 15 Soit les intervalles $A =]-4; 6]$ et $B = [2; 11]$,
alors, $A \cap B = [2; 6]$ et $A \cup B =]-4; 11]$.

Exercice 16 Résoudre l'inéquation : $(2x - 4)(4x + 16)(-2x - 5) \leqslant 0$.

Exercice 17 Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. On considère alors les événements
A :"Tirer un cœur"
B :"Tirer un dix"
C :"Tirer une figure (valet, dame, roi)"
Décrire les événements : $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$.
Donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$ et $P(B \cap C)$.

Dans le cas général où les événements A et B ont des issues en commun (c'est-à-dire si A et B ne sont pas incompatibles), dans la somme $P(A) + P(B)$ on compte deux fois les probabilités des issues communes à A et à B, c'est-à-dire les issues de $A \cap B$.
On a donc :

Prop.: *Pour tous les événements A et B,* $\boxed{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$

Exercice 18 Dans un groupe de 20 personnes, 10 personnes s'intéressent à la pêche, 8 à la lecture et 5 ne s'intéressent ni à la pêche ni à la lecture.
On désigne une personne de ce groupe au hasard.
On note A l'événement "la personne désignée s'intéresse à la pêche" et B l'événement : "la personne désignée s'intéresse à la lecture".

1. Traduire l'énoncé en complétant le tableau :
2. Déterminer la probabilité pour qu'elle s'intéresse :
   a) à l'une au moins des deux activités
   b) aux deux activités.

Effectifs	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			20

Définition: *On appelle* **événement contraire** *de l'événement A, l'événement noté $\overline{A}$ contenant tous les éléments qui ne sont pas dans A.*
L'événement contraire $\overline{A}$ vérifie ainsi :
– $A \cup \overline{A} = \Omega$
– $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Exercice 19 J'achète trois billets de tombola.
1) Quel est l'événement contraire de l'événement "Tous mes billets sont gagnants" ?
2) Quel est l'événement contraire de l'événement "aucun de mes billets n'est gagnant" ?
(On pourra décrire tous les cas possibles en notant G les billets gagnants.)

Prop.: *Pour tout événement A,* $\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1} \iff \boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

Exercice 20 On lance 3 fois de suite une pièce équilibrée, et on note la suite des résultats obtenus. Par exemple, PFF est une issue possible.

1) Utiliser un arbre pour décrire l'ensemble de toutes les issues.

2) Déterminer les probabilités des événements :
A :"Ne jamais obtenir Pile"
B :"Obtenir une seule fois Pile"
C :"Obtenir exactement deux fois Pile"
D :"Obtenir trois fois Pile"

3) On lance maintenant ce dé 8 fois successivement, et on considère l'événement E :"Obtenir au moins une fois Face"
Déterminer la probabilité de l'événement E

(Indication : quel est l'événement contraire $\overline{E}$ et quelle est sa probabilité ?)

Exercice 21 Un tireur à l'arc touche une cible une fois sur deux.

1) Il dispose de deux flèches. Quelle est la probabilité qu'il touche la cible au moins une fois ?
2) Quelle est cette probabilité s'il dispose de 3 flèches ? de 4 flèches ?
4) De combien de flèches doit-il disposer pour que la probabilité de toucher la cible soit supérieure à 0,99 ?

Exercice 22 ****

Je cherche un emploi et envoie mon CV à différentes entreprises.

A chaque entreprise, j'ai une chance sur 5 d'avoir une réponse positive.

Combien de lettres dois-je écrire pour que la probabilité d'obtenir au moins une réponse positive soit supérieure à $\dfrac{3}{4}$?

Exercice 23 On lance une pièce bien équilibrée 10 fois successivement.

1. Déterminer les probabilités d'obtenir :
   a) 10 fois "pile" ;
   b) 10 fois "face" ;
   c) exactement 1 fois "pile" ;
   d) exactement 1 fois "face".
2. Je lance une pièce inconnue (en particulier sans savoir si elle est bien équilibrée) 10 fois successivement. J'ai obtenu 10 fois "pile".

   Puis-je raisonnablement penser que la pièce n'est pas équilibrée ?
3. Reprendre cet exercice en remplaçant les 10 lancés par 100 lancés.

Exercice 24 Une étude dans une grande ville a donné les résultats suivants : 73 % des personnes ont un velo, 19 % ont des rollers et 17 % possèdent les deux.

On désigne une personne au hasard dans l'annuaire de la ville.

1. Déterminer la probabilites que cette personne ait soit un velo soit des rollers.
2. Déterminer la probabilité que cette personne n'ait ni velo ni roller ?
3. Quelle est la probalité que cette personne ait des rollers mais pas de velo ?

Exercice 25 **Espérance pour un QCM**

Un QCM est constitué de 3 questions, à chacune desquelles on peut répondre par vrai ou faux. Chaque bonne réponse rapporte 1 point, et mauvaise réponse retire 0,5 point. Si la note finale est négative, elle est ramenée à 0.

Je répond au hasard à toutes les questions de ce QCM.

1. Décrire la situation par un arbre.
2. Quelles notes est-il possible d'avoir ? Compléter le tableau :

Note	0		
Probabilité			

3. Quelle note peut-on espérer en moyenne ?

Exercice 26 Sur la route qui mène de chez moi à mon travail, il y a 2 feux tricolores.
Le 1er feux se trouve à 6 minutes de chez moi, le 2ème feux se situe à 3 minutes du 1er, et enfin il faut rouler 4 minutes pour arriver du 3ème feux à mon travail.
Chaque feux a les cycles suivants Vert→Orange→Rouge, avec les durées :
Vert : 105 secondes , Orange : 10 secondes , et Rouge : 65 secondes.

1. Quelle est la probabilité que les deux feux soient verts lors de mon trajet ?
2. Je dois être à mon travail dans moins de 15 min. Quelle est la probabilité que je sois dans les temps ?

Exercice 27 Dans un lycée de 1280 élèves, 300 élèves se sont fait vaciner contre la grippe. Pendant l'hiver, il y une épidémie de grippe et 10 % des élèves contractent la maladie. De plus, 3 % des élèves vaccinés ont la grippe.

1. Compléter le tableau :

	Nombre d'élèves ayant eu la grippe	Nombre d'élèves n'ayant pas eu la grippe	Total
Nombre d'élèves vaccinés			
Nombre d'élèves non vaccinés			
Total			1280

Pour les questions suivantes, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

2. On choisit au hasard l'un des élèves du lycée, tous les élèves ayant la même probabilité d'être choisis.
On considère les événements suivants :
A : "l'élève a été vacciné"
B : "l'élève a eu la grippe"
   a) Calculer la probabilité des événements A et B.
   b) Décrire par une phrase les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, et calculer leur probabilité.
   c) On choisit au hasard un des élèves vaccinés. Quelle est la probabilité qu'il ait eu la grippe.
   d) On choisit au hasard un des élèves qui a eu la grippe. Quelle est la probabilité qu'il ait été vacciné ?
3. Représenter la situation à l'aide d'un arbre.

Exercice 28 On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. L'issue de l'expérience aléatoire est la distance entre les deux numéros obtenus : par exemple : lorsque les numéros 2 et 5 sortent, l'issue est 2.

1. Représenter la situation par un tableau ou un arbre.
   Quel est l'ensemble E de toutes les issues possibles ?
2. Préciser la loi de probabilité sur E.
3. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   A : "La distance est strictement supérieure à 2."
   B : "La distance est comprise entre 2 et 5."
4. Le joueur peut, au choix, lancer un dé cubique ou lancer deux dés en suivant la règle précédente.
   Quel est le choix le plus avantageux lorsque, pour gagner, le joueur doit obtenir 3 ?

Exercice 29 En informatique, un octet est unez suite de huit chiffres tous égaux à 0 ou à 1. Par exemple, 10011011 et 01101010 sont deux octets.

1. Combien peut-on former d'octets différents ?
2. On écrit au hasard un octet.
   a) Calculer la probabilité de chacun des événements :
      A : "Les deux premiers chiffres sont égaux à 1"
      B : "Le dernier chiffre est égal à 0"
   b) Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
   c) En déduire la probabilité de l'événement $A \cup B$.

Exercice 30 (***) Un hopital comporte deux salles d'opération, S1 et S2, qui ont la même probabilité d'être ocupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée est $0,9$; celle que les deux salles soit occupées vaut $0,5$.

Quelle est la probabilité que :

a) la salle S1 soit libre ?

b) les deux salles soient libres ?

c) l'une des deux salles au moins soient libre ?

d) une seule salle soit libre ?