Nombres complexes

Y. Morel

Table des matières

Version en ligne (avec exercices corrigés)

Introduction - Résolution d'équations algébriques

Soit le trinôme du second degré $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5$.

Le discriminant de P est : $\Delta = 9 - 10 = -1 < 0$, donc P n'a pas de racine réelle.

Imaginons un instant que l'on puisse néanmoins écrire $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-1}$, et donc les formules donnant les racines de P (qui ne sont donc sûrement pas réelles !) :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -3 + \sqrt{-1}\ ;\quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -3 - \sqrt{-1}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
P(x_1) = P(-3+\sqrt{-1}) &= \frac{1}{2}\Big(-3+\sqrt{-1}\Big)^2 + 3\Big(-3+\sqrt{-1}\Big) + 5 \\
&= \frac{1}{2}\Big(9 - 6\sqrt{-1} + \big(\sqrt{-1}\big)^2\Big) - 9 + 3\sqrt{-1} + 5 \\
&= \frac{1}{2}\Big(9 - 6\sqrt{-1} + (-1)\Big) - 4 + 3\sqrt{-1} \qquad (\text{car } \sqrt{-1}^2 = -1\,!) \\
&= 0
\end{aligned}$$

On calcule de même que $P(x_2) = 0$, et ainsi, ce trinôme du second degré admet bien deux racines distinctes, mais celles-ci **ne sont pas réelles**.

Le nombre $\sqrt{-1}$ n'existe pas : ce n'est pas un nombre réel. Cardan, mathématicien du XVIème siècle appelait ce type de nombre des nombres "impossibles".

Plus tard, Descartes leur donna le nom de nombres "imaginaires", qui sont devenus aujourd'hui des **nombres complexes**.

1 Le plan complexe

Théorème *(admis)*
Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes***, qui possède les propriétés suivantes :*

- *$\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$*
- *il existe un nombre complexe, noté i tel que $i^2 = -1$.*
- *tout nombre complexe z s'écrit de manière* **unique** *sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels.*

Exemples : $z = 3 + 2i \in \mathbb{C}$; $z_2 = -5 \in \mathbb{R}$, donc $z_2 \in \mathbb{C}$; $z_3 = \sqrt{7} - 6i \in \mathbb{C}$; ...

Définition *L'écriture $z = x+iy$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ s'appelle la* **forme algébrique** *du nombre complexe z.*
x est la partie réelle de z, notée $\Re(z)$, et y est la partie imaginaire de z, notée $\Im(z)$.
Si $y = 0$, alors z est réel ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)
Si $x = 0$, z est dit imaginaire pur.

Exemples :

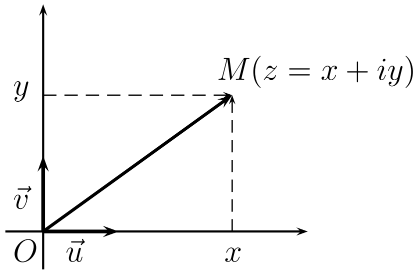
- $z = 3 - 2i$, $\Re(z) = 3$ et $\Im(z) = -2$.
- $z = -1 + i$, $\Re(z) = -1$ et $\Im(z) = 1$.
- $z = \frac{1}{2}i$, $\Re(z) = 0$ et $\Im(z) = \frac{1}{2}$; z est imaginaire pur.
- $z = 12$, $\Re(z) = 12$ et $\Im(z) = 0$; z est réel.

D'après le premier théorème, on a alors :

Propriété *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x' et y' quatre nombres réels, alors,*

$$z = z' \iff \Big(x = x' \quad \text{et} \quad y = y'\Big)$$

Définition *(Plan complexe)*
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct.
A tout nombre complexe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, on associe le point M de coordonnées $M(x; y)$.
On dit que z est l'affixe du point M, ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$; et que le point M, ou le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'image de z.



Définition *Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, que l'on appelle donc* **axe réel**.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle, $z = 0 + iy = iy$ est appelé un nombre **imaginaire pur**. *Les images de ces nombres sont les points de l'axe des ordonnées, que l'on appelle donc* **axe imaginaire (pur)**.

Exercice 1 Placer les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1-2i$, $z_B = 4-i$ et $z_C = \sqrt{2}+\dfrac{3}{2}i$.
Déterminer les longueurs OA, OB et OC et AB.

2 Opérations sur les nombres complexes

2.1 Opérations numériques et algébriques

Les règles de calcul sur les nombres réels se prolongent aux nombres complexes.

Exercice 2 Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

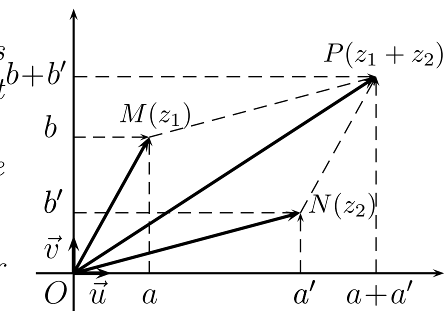
- $(2 + 3i) + (-1 + 6i)$ • $(5 + i) - (3 - 2i)$ • $(1 + i)(3 - 2i)$ • $(4 + i)(-5 + 3i)$
- $(2 - i)^2$ • $(x + iy)(x' + iy')$ • $(x + iy)^2$ • $(2 - 3i)(2 + 3i)$ • $(a + ib)(a - ib)$

Exercice 3 On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1 + j + j^2$.

2.2 Opérations géométriques

Propriété *Soit $z_1 = a + ib$ et $z_2 = a' + ib'$ deux nombres complexes, avec a, b, a' et b' quatre réels, et M et N leur image respective dans le plan complexe.*
Alors $z = z_1 + z_2 = (a+a') + i(b+b')$ a pour image le point P tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.

De même, le vecteur $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ a pour affixe le complexe $z_{\overrightarrow{MN}} = z_2 - z_1$.



Propriété *Soit deux points A et B d'affixe z_A et z_B, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_b - z_A$.*
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe z et z', alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe $z+z'$.
Si $k \in \mathbb{R}$, le vecteur $k\vec{u}$ a pour affixe kz.
Le milieu z_I du milieu I segment $[AB]$ est $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2}$.

Exercice 4 Les points A, B et C ont pour affixes respectives $-2+i$, $3+3i$, $1+\dfrac{11}{5}i$.

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) En déduire que les points A, B et C sont alignés.
c) Placer les points A, B et C.

Exercice 5 Les points A, B et C ont pour affixes respectives $1+\dfrac{1}{2}i$, $\dfrac{3}{2}+2i$ et $-1-\dfrac{11}{2}i$.
Placer les points A, B et C dans le plan complexe, et montrer qu'ils sont alignés.

Exercice 6 On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixe $z_A = 3+i$, $z_B = 2-2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1+5i$.

a) Faire une figure
b) Montrer de deux façons différentes que $ABCD$ est un parallélogramme.

3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition *Soit $z = x+iy$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, un nombre complexe. On appelle* **conjugué** *de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.*

Propriété *Dans le plan complexe, si le point M a pour affixe z, alors l'image M' de $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.*

Exemples : • $z = 3+2i$, alors $\overline{z} = 3-2i$. • $\overline{3-\dfrac{1}{2}i} = 3+\dfrac{1}{2}i$ $\quad \overline{-5} = -5$ $\quad \overline{3i} = -3i$

Propriété
- $\overline{\overline{z}} = z$ • $z\overline{z} = x^2+y^2$ • $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ • $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
- $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$
- *si* $z\neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ • *si* $z'\neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $z+\overline{z} = 2\Re(z)$ *et donc, z imaginaire pur* $\iff \Re(z) = 0 \iff z = -\overline{z}$
- $z-\overline{z} = 2i\Im(z)$, *et donc,* $z\in\mathbb{R} \iff \Im(z) = 0 \iff z = \overline{z}$

Exercice 7 Soit les nombres complexes : $z_1 = \dfrac{3-i}{5+7i}$ et $z_2 = \dfrac{3+i}{5-7i}$.
Vérifier que $z_1 = \overline{z_2}$, et en déduire que z_1+z_2 est réel et que z_1-z_2 est imaginaire pur.
Calculer z_1+z_2 et z_1-z_2.

Exercice 8 Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3+z^2-4z+6$.

a) Montrer que pour tout complexe z, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
b) Calculer $(1+i)^2$ puis $(1+i)^3$ et vérifier que $1+i$ est une racine de P, et en déduire une autre racine complexe de P.

Exercice 9 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Z = z^2+\overline{z}$ soit un nombre réel *(on pourra poser $z = x+iy$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, et écrire Z sous forme algébrique)*.

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations (écrire la solution sous forme algébrique) :
a) $5\overline{z} = 4 - i$ b) $(1+i)\overline{z} + 1 - i = 0$ c) $2\overline{z} + i = z + 2$ d) $3\overline{z} - 2iz = 5 - 3i$

Propriété *(Inverse d'un nombre complexe)*
Tout nombre complexe non nul z admet un inverse, noté $\dfrac{1}{z}$.

Démonstration: Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul, c'est-à-dire $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
Alors, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ avec $x^2+y^2 \neq 0$ □

Propriété *(Quotient de deux nombres complexes) Le quotient des deux nombres complexes z_1 et $z_2 \neq 0$, est $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \times \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{z_1 \times \overline{z_2}}{z_2 \times \overline{z_2}}$.*

Exercice 11 Ecrire sous forme algébrique $(x + iy)$ les nombres complexes :

• $\dfrac{1}{3+2i}$ • $\dfrac{1+i}{3-2i}$ • $\dfrac{1+4i}{1-2i}$ • $\dfrac{2i}{2i-1}$ • $(2+3i)\left(5-i\right) + \left(\dfrac{1}{2}+3i\right)^2$

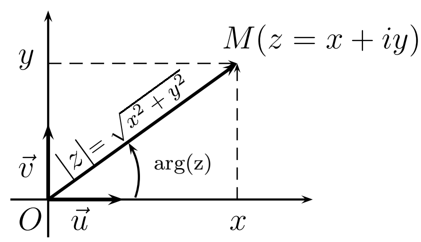
• i^3 • $\dfrac{1}{i}$ • i^4 • i^5 • i^6 • $\dfrac{3}{i^{10}}$

Exercice 12 Soit $z_1 = -1 + 3i$ et $z_2 = 4 - i$. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

• $z_1^2 - 2z_2$ • $z_1 z_2^2$ • $\dfrac{z_1}{z_2}$ • $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$

4 Module et argument d'un nombre complexe

Définition *Soit dans le plan complexe un point M d'affixe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.*
Alors, $OM = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$. Ce nombre, **réel et positif**, *s'appelle* **le module** *du nombre complexe z, et est noté $|z| = OM = \sqrt{x^2+y^2}$.*
On appelle **argument** *du nombre complexe non nul z, noté arg(z), toute mesure en radians de l'angle orienté : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.*



Remarque : • Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments : si θ est un de ces arguments, alors tous les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

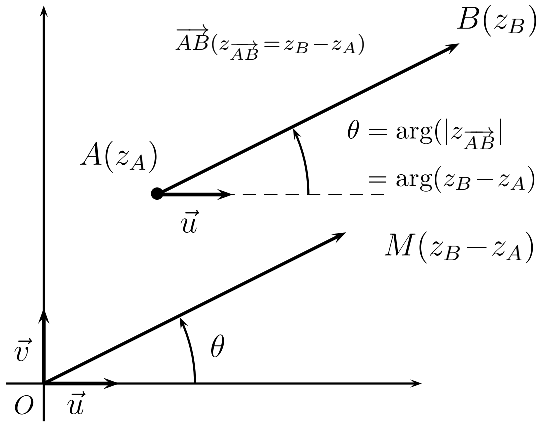
On note $\arg(z) = \theta$ (modulo 2π), ou $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$, ou encore, pour simplifier (mais alors par abus de langage), $\arg(z) = \theta$.

• Si z est un réel ($z = x + i \times 0$), alors $|z| = |x|$: le module coïncide avec la valeur absolue pour les nombres réels.
Par exemple, $|6| = \sqrt{6^2} = 6$, et $|-3| = \sqrt{(-3)^2} = 3$.

Exercice 13 Calculer les modules des nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - 3i$, $z_3 = -1 - 5i$, $z_4 = 3$, $z_5 = -6$, $z_7 = 8i$, $z_8 = -3i$, $z_9 = \sqrt{3} + i$

Propriété *Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ et donc,*

- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_a|$
- $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = arg(z_B - z_A)$.



Exercice 14 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

- $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$ • $|z-3| = |z+2i|$ • $|z+1-2i| < \sqrt{5}$ • $\arg(z+i) = \pi$

Exercice 15 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1 + i \ , \ z_B = 4 + 5i \ , \ z_C = 5 - 2i \ .$$

1. Montrer que $AB = AC$.
2. a) Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.
   b) Déterminer les affixes des points I et J, milieux respectifs de $[GC]$ et $[AB]$.

Propriété *Pour tout nombres complexes z et z' :*

- *si* $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$, $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
- $|-z| = |z|$ • $|\overline{z}| = |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire)*
- $|zz'| = |z|\,|z'|$ • $|z^n| = |z|^n$ • $\dfrac{|z|}{|z'|} = \left|\dfrac{z}{z'}\right|$

Exercice 16 Calculer le module des nombres complexes suivants :

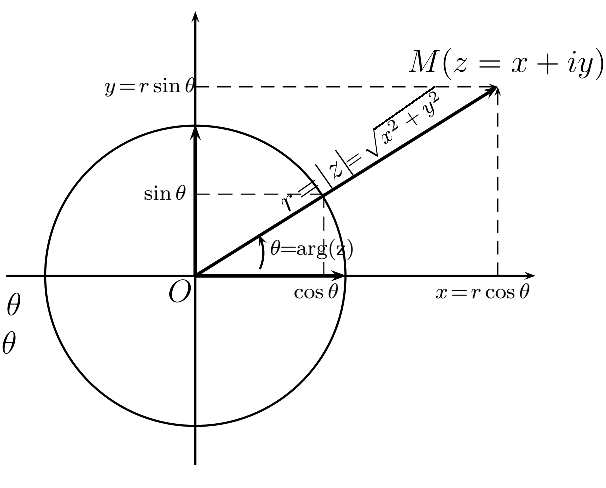
a) $z = \dfrac{1+i}{3-4i}$ b) $z = (2+2i)(-1+i)$ c) $z = \dfrac{i(-1-i)}{-3+4i}$ d) $z = \dfrac{-4(2-i)}{2i(1+2i)}$

5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition *Dans le plan complexe un point M peut-être repéré par ses coordonnées cartésienne $(x; y)$, ou son affixe complexe $z = x+iy$, ou par ses coordonnées polaires $(r; \theta)$, avec $r = OM$ et $\theta = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.*

On a les relations :

$$\left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \ , \ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right.$$



L'affixe z du point M s'écrit alors,

$$z = r\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$$

Cette écriture est la **forme trigonométrique** *de z.*

Exercice 17 Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = 3$
- $z_2 = -4$
- $z_3 = 2i$
- $z_4 = -1 + i$
- $z_5 = -\sqrt{3} + i$
- $z_6 = -6\sqrt{3} + 6i$
- $z_7 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

6 Equation du second degré

Propriété *Soit a un nombre réel. Les solutions de l'équation $z^2 = a$ sont appelées racines carrées de a dans $\mathbb{C}$, avec*
- *si $a \geq 0$, alors $z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$ (deux racines réelles)*
- *si $a < 0$, alors $z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$ (deux racines complexes, imaginaires pures)*

Démonstration : • Si $a \geq 0$, alors $z^2 = a \iff (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) = 0$, d'où les racines de l'équation.
• Si $a < 0$, $z^2 = a \iff z^2 - i^2(-a) = z^2 - i^2(\sqrt{-a})^2 = 0 \iff (z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a}) = 0$, d'où les racines complexes.

Exemples : Les racines carrées de 2 dans $\mathbb{C}$ sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, qui sont réelles ; les racines carrées de -4 dans $\mathbb{C}$ sont $i\sqrt{4} = 2i$ et $-i\sqrt{4} = -2i$.

Propriété *L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a \neq 0$, b et c sont trois réels, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ admet :*
- *si $\Delta = 0$, une solution réelle double $z = -\dfrac{b}{2a}$*
- *si $\Delta > 0$, deux solutions réelles distinctes $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.*
- *si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées :*

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et , } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas, le trinôme du second degré se factorise selon (avec éventuellement $z_1 = z_2$) : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exercice 18 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
- $z^2 + z + 1 = 0$
- $z^2 - 3z + 18 = 0$
- $z^2 + 9z - 4 = 0$
- $-z^2 + (1 + \sqrt{3})z - \sqrt{3} = 0$

Exercice 19 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

Exercice 20 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 + 5z^2 - 36 = 0$.

Exercice 21 On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$.
a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout complexe z, $P(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$.
b) En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 22 Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i$.
1. Calculer $P(i)$.
2. Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z) = (z - i)(z^2 + pz + q)$.
3. Déterminer alors toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
4. Montrer que ces solutions sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle.

Exercice 23 Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = 3z^3 + (1 + 6i)z^2 + 2(8 + i)z + 32i$.

a) Vérifier que $z_0 = -2i$ est une racine de P.

b) Trouver les nombres réels a, b et c tels que, pour tout complexe z, $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

c) Déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 24 Soit les nombres complexes $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = iz_1$.

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. a) Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2.
   b) Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que $z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$, $z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $z_c = 8$.
   Montrer que $z_A = 2\overline{z_1}$.
3. a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
   b) Calculer $|z_A - z_B|$, $|z_B - z_C|$ et $|z_A - z_C|$.
   c) En déduire que le triangle ABC est rectangle.