Algorithmique - Annales de Bac

Exercice 1 *Bac ES-L Pondichéry 2014 - 5 points*

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.

Le centre ouvre ses portes le 1er janvier 2013 avec 115 oiseaux.

Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1er janvier d'une année restent présents le 1er janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier des années suivantes.

La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année $2013 + n$.

1. Calculer u_1 et u_2. Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.
   a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'**algorithme 3** permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1er janvier de l'année $2013 + n$.

   Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

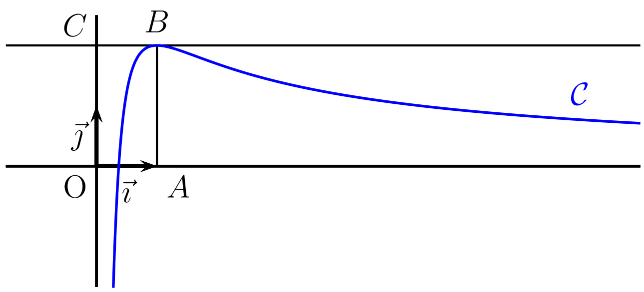
algorithme 1	**algorithme 2**	**algorithme 3**
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
U est un nombre réel	U est un nombre réel	U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers	i et N sont des nombres entiers	i et N sont des nombres entiers
Début	**Début**	**Début**
Saisir une valeur pour N	Saisir une valeur pour N	Saisir une valeur pour N
Affecter 115 à U	Pour i de 1 à N faire	Affecter 115 à U
Pour i de 1 à N faire	— Affecter 115 à U	Pour i de 1 à N faire
— Affecter $0,6 \times U + 120$ à U	— Affecter $0,4 \times U + 115$ à U	— Affecter $0,4 \times U + 120$ à U
Fin Pour	Fin Pour	Fin Pour
Afficher U	Afficher U	Afficher U
Fin	**Fin**	**Fin**

   b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $0,4$. Préciser v_0.
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 200 - 85 \times 0,4^n$.
   d) La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.
4. Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1er janvier.

   Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.

Exercice 2 *Bac France métroplitaine - 2013 - 7 points*

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

— les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\ ;\ 0)$, $(1\ ;\ 2)$, $(0\ ;\ 2)$;
— la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
— il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$.

1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

   b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

   c) En déduire les réels a et b.

2. a) Justifier que pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

   b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\,\dfrac{\ln x}{x}$.

   c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

   b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$. Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
Variables :        a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :   Affecter à a la valeur 0.
                   Affecter à b la valeur 1.
Traitement :       Tant que b − a > 0,1
                     | Affecter à m la valeur (1/2)(a + b).
                     | Si f(m) < 1 alors Affecter à a la valeur m.
                     | Sinon Affecter à b la valeur m.
                     | Fin de Si.
                   Fin de Tant que.
Sortie :           Afficher a.
                   Afficher b.
```

   a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

   b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

   c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

   a) Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = 1$.

   b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

Exercice 3 ——— *Bac France métroplitaine (extrait) - 2012*

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier stritement positif par $v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.
On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0
Traitement :	Pour i variant de 1 à n
	Affecter à u la valeur $u+\dfrac{1}{i}$
Sortie :	Afficher u

1. Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur de $n=3$.
2. Compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

Exercice 4 ______ *Bac Polynésie - 2012*

Partie A On considère l'algorithme suivant : les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée	Saisir le nombre entier naturel non nul N
Traitement	Affecter à U la valeur 0 Pour k allant de 0 à $N-1$ Affecter à U la valeur $3U-2k+3$ Fin pour
Sortie	Afficher U

Quel est l'affichage en sortie pour $N=3$?

Partie B On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n-2n+3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-n+1$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=3^n+n-1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
   b. Déterminer à la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p=2$.
   c. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Exercice 5 ______ *Bac centres étrangers 2012*

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul par : $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx$.

1. a) Soit g la fonction définie par $g(x)=xe^{x^2}$.
   Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de g.
   b) En déduire la valeur de I_1.
   c) On donne la formule d'intégration par parties : pour toutes fonctions u et v dérivables sur $[a;b]$,
   $$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx\ .$$
   En utilisant l'intégration par parties, en posant $u(x)=x^{n+1}$ et $v'(x)=xe^{x^2}$, démontrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a :
   $$I_{n+2}=\frac{1}{2}e-\frac{n+1}{2}I_n\ .$$

d) Calculer I_3 et I_5.

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$
Traitement	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n+2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.

   b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

   c) En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note l sa limite.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer la valeur de l.

Exercice 6 *Bac Asie - 2012*

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictement positif non nul b ($b > a$) Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	Tant que $n < N$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}} .$$

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.

3. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.