Fonction exponentielle - Exercices

Exercice 1 Soit n un nombre entier relatif. Simplifier les écritures suivantes :

a) $2^{2n}\times 2$ b) $\dfrac{2^{3n+1}}{2^{2n+1}}$ c) $\left(2^{n+1}\right)^3\times 2^{-1}$ d) $\dfrac{4^{n+2}}{2^{2n}}\times\dfrac{1}{8}$ e) $\dfrac{2^{n+3}}{4^{-n}}\times 2^{-n}$

Exercice 2 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, $f'(x)=0$.
Que peut-on dire de f ?
On suppose de plus que $f(0)=2$. Que peut-on alors dire de f ?

Exercice 3 Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative de la fonction exponentielle aux points d'abscisse 0 ; 1 et 2.

Exercice 4 Simplifier les expressions : a) $(e^x)^5e^{-2x}$ b) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$ c) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^{-x}}$

Exercice 5 Démontrer que pour tout réel x,

a) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}=e^x\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}$. b) $(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2=4$.

c) $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ d) $e^{-x}-e^{-2x}=\dfrac{e^x-1}{e^{2x}}$

Exercice 6 Résoudre les équations et inéquations :

• $(E_1) : e^x=1$ • $(E_2) : e^{2x}=e$ • $(E_3) : e^x=e^{-x}$ • $(E_4) : e^{x^2}=(e^{-x})^2e^3$ • $(E_5) : e^{2x+1}=e^{\frac{6}{x}}$

• $(I_1) : e^x>e$ • $(I_2) : e^{2x}\leq 1$ • $(I_3) : (e^x)^3\leq\dfrac{1}{e}$ • $(I_4) : e^x-\dfrac{1}{e^x}>0$ • $(I_5) : e^{x^2}\geq e^{-x-1}$

Exercice 7 On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit a un réel. Déterminer l'équation de la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.
2. Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite T
   (Indication : on pourra étudier les variations de la fonction φ définie par $\varphi(x)=e^x-y$, où y désigne l'équation de la tangente T_a).

Exercice 8 Étudier le sens de variation des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 2) $f(x)=e^{2x}-2x$ 3) $f(x)=e^{x^2}-x^2$ 4) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 5) $f(x)=(2x+3)e^{-2x}$

Exercice 9 Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x)=e^{-3x}$ b) $g(x)=e^x+e^{-x}$ c) $h(x)=x+e^x$ d) $k(x)=e^{2x}+e^x+1$

e) $l(x)=e^{3x}-e^x$ f) $m(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+2}$ g) $n(x)=\dfrac{-2e^x}{1+e^x}$

Exercice 10 Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^2+2-e^x$ b) $g(x)=\dfrac{2e^x-x}{x^2}$ c) $h(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

d) $l(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$ e) $k(x)=\dfrac{\sqrt{e^x+2}}{x}$ f) $t(x)=\dfrac{e^{2x}+x^2}{x^2+x-3}$

Exercice 11 A l'aide d'un changement de variable, étudier la limite en $+\infty$ des fonctions :

a) $f(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{2e^{x^2-1}}{x^2}$ c) $f(x) = x^3 e^{-\sqrt{x}}$.

Exercice 12 Etudier sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes (sens de variations et limites) :

a) $f(x) = e^{-x}$ b) $g(x) = e^x + e^{-x}$ c) $h(x) = x + e^x$ d) $k(x) = e^{3x} - 3e^x$

e) $l(x) = e^{-x^2}$ f) $m(x) = (0,4x - 2)e^{-0.1x}$ g) $n(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

Exercice 13 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 e^x$ et $g(x) = (x^2 - x - 1)\, e^x$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.
2. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Déterminer les limites de f et g en $-\infty$ et $+\infty$.
4. Dresser les tableaux de variations de f et g.

Exercice 14 Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'inétéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capeteur de 1m de longueur.

Cette température est modélisée par : $T(x) = 170 - 150e^{-0,6x}$, où $x \in [0;1]$ est la distance, en mètres, parcourue par le fluide depuis son entré dans le capteur, et $T(x)$ est la température en °C.

1. Déterminer la température à l'entrée du capteur.
2. (a) Etudier les variations de la température T sur $[0;1]$.
   (b) En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.
   (c) Tracer dans un repère la courbe représentant la température T.

Exercice 15 *(Extrait Bac)* Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)\left(2 - e^{-x}\right)$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm et Δ la droite d'équation $y = 2x - 2$.

1. a) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ.
2. (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = xe^{-x} + 2\left(1 - e^{-x}\right)$.
   (b) En déduire que, pour tout réel x positif, $f'(x) \geqslant 0$.
   (c) Préciser la valeur $f(0)$, puis établir le tableau de variation de f.
3. Avec le plus grand soin, tracer $\mathcal{C}$ et Δ dans le même repère.
4. Déterminer le point de A de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ.
   Tracer cette tangente dans le repère précédent.

Exercice 16 Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(1) Pour tout réel x, $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$

(2) Pour tout réel x, $f(x) = g'(x)$

(3) $f(0) = 1$.

1. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.
   b) Calculer $g(0)$.
2. En dérivant la relation (1), montrer que $g(x) = f'(x)$.
3. On pose $u = f + g$ et $v = f - g$.

a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
b) Démontrer que $u' = u$ et que $v' = -v$.
c) On déduit de ce qui précède que $u(x) = Ae^x$ et $v(x) = Be^{-x}$, A et B étant deux réels. En déduire alors f et g.

Exercice 17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonale.

1. Démontrer que f est une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
2. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{1 + e^{-x}}$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) - (x - 1) = \dfrac{2}{e^x + 1}$.
   En déduire que la droite d'équation Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   b) Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

Exercice 18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$, et on désigne par Γ sa courbe représentative.

1. Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^x$.
3. a) Déterminer les limites de f en $+\infty$.
   b) Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$, et tracer l'allure de Γ.

Exercice 19 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)e^{-2x}$.
$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
   b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. a) Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
   b) Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 20 (*(d'après Bac S)* g_1 et g_2 sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_1(x) = xe^{-x} \quad \text{et,} \quad g_2(x) = x^2e^{-x}$$

1. a) Etudier les limites de g_1 et g_2 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.
   b) Etudier le sens de variation de g_1 et g_2.
2. Dans un repère orthonormal du plan, on note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentatives de g_1 et g_2.
   a) Préciser la position relative des deux courbes.
   b) Tracer les deux courbes.
3. a) Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse a (a réel).
   b) Cette tangente coupe l'axe des ordonnées en un point N.
   Déterminer en fonction de a, l'ordonnée de N.