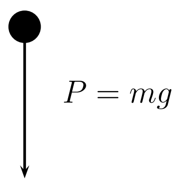
Fonction exponentielle

$T^{\text{ale}}S$

Introduction

Chute d'un corps dans le vide



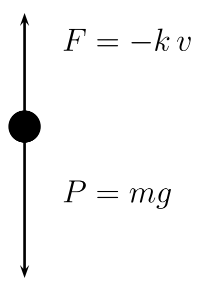
Si $v(t)$ désigne la vitesse du corps à l'instant t, alors l'accélération du corps est la dérivée $v'(t)$.
Dans le vide, le corps est soumis uniquement à la force de pesanteur son poids) et la loi de Newton (principe fondamental de la mécanique) donne :

$$mv'(t) = P = mg$$

soit aussi, $\boxed{v'(t) = g}$

Cette équation est une équation différentielle, c'est-à-dire une équation dont l'inconnue est une fonction et faisant intervenir les dérivées de la fonction recherchée.

Chute d'un corps dans un fluide visqueux



Pour fournir un modèle plus réaliste, on peut prendre en compte de plus les frottements ; ceux-ci peuvent-être modélisés par une force opposée au mouvement du corps, et inversement proportionnelle à sa vitesse.
La loi de Newton s'écrit alors :

$$mv'(t) = F + P = -kv(t) + mg$$

soit aussi, $\boxed{mv'(t) + kv(t) = mg}$

La fonction $v(t)$ est cette fois solution d'une équation différentielle reliant $v(t)$ et sa dérivée $v'(t)$.

Radioactivité A la toute fin du XIX ème siècle, Marie et Pierre Curie mettent en évidence des éléments radioactifs autres que l'uranium, le polonium et le radium.

Des atomes de ces éléments radioactifs se désintègrent en permanence.
Si on désigne par $N(t)$ le nombre d'atomes de radium à l'instant t, alors la quantité d'atomes qui se désintègrent à un instant donné est proportionnelle à la quantité d'atomes encore présente :

$$\boxed{N'(t) = -aN(t)}$$

En résolvant cette équation, on peut donc connaître à chaque instant t le nombre d'atome $N(t)$.

Ceci est par exemple appliqué pour la *datation au carbone 14* de matière organique.
Le carbone 14 est un isotope radioactif du carbone. Connaissant le nombre d'atomes de carbone 14 présents et qui se sont désintégrés, on détermine la durée qu'à pris cette désintégration, c'est-à-dire l'âge de la matière organique.

I - Rappels

Exercice 1 Soit n un nombre entier relatif. Simplifier les écritures suivantes :

a) $2^{2n}\times 2$ b) $\dfrac{2^{3n+1}}{2^{2n+1}}$ c) $\left(2^{n+1}\right)^3\times 2^{-1}$ d) $\dfrac{4^{n+2}}{2^{2n}}\times\dfrac{1}{8}$ e) $\dfrac{2^{n+3}}{4^{-n}}\times 2^{-n}$

Exercice 2 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, $f'(x)=0$.

Que peut-on dire de f ?

On suppose de plus que $f(0)=2$. Que peut-on alors dire de f ?

II - Equation $y'=y$. Définition de la fonction exponentielle

Lemme *Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=f(x)$, et $f(0)=1$, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration: On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=f(x)\times f(-x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc φ l'est aussi.

De plus, si on pose $u: x\mapsto -x$, alors on a $\varphi(x)=f(x)\times f\left(u(x)\right)$, et alors, avec $u'(x)=-1$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x)\times f(u(x))+f(x)\times\left[u'(x)\times f'(u(x))\right]\\ &= f'(x)\times f(-x)+f(x)\times\left[-f'(-x)\right]\\ &= f(x)\times f(-x)+f(x)\times\left[-f(-x)\right]=0\end{aligned}$$

φ est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or $\varphi(0)=1$, et donc, pour tout réel x, $\varphi(x)=1$, c'est-à-dire $f(x)\times f(-x)=1$. En particulier, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$. □

Théorème *Equation $f'=f$*

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**, *et est notée* **exp** *: $x\mapsto \exp(x)$.*

Démonstration: • **Existence :** admise

• **Unicité :** Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f'=f$, $f(0)=1$ et $g'=g$, $g(0)=1$.

On note h la fonction $h=\dfrac{g}{f}$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, avec, $h'=\dfrac{g'f-gf'}{f^2}=\dfrac{gf-gf}{f^2}=0$.

Ainsi, h est constante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0)=\dfrac{g(0)}{f(0)}=1$, et donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, c'est-à-dire, pour tout x réel, $f(x)=g(x)$, et ainsi $g=f$. □

Exercice 3 Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative de la fonction exponentielle aux points d'abscisse 0 ; 1 et 2.

$\boxed{\textbf{Méthode d'Euler}}$ On cherche à résoudre de manière approchée l'équation $f'(x)=f(x)$, avec $f(0)=1$, sur l'intervalle $[0;1]$.

On découpe pour cela l'intervalle $[0;1]$ avec les N points régulièrement espacés :

$$x_0=0\ ;\ x_1=\frac{1}{N}\ ;\ x_2=\frac{2}{N}\ ;\ \dots\ ;\ x_{N-1}=\frac{N-1}{N}\ ;\ x_N=1.$$

et on cherche alors les valeurs prises par la fonction f aux points x_n.

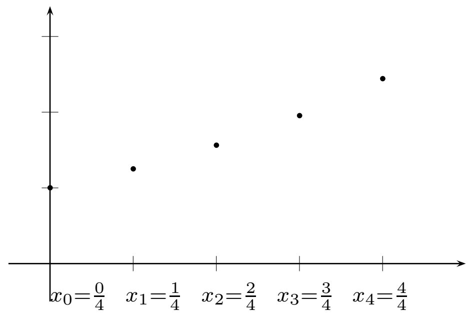
On peut approximer la dérivée de f au point x_n par le taux de variation : $f'(x_n) \simeq \dfrac{f(x_n+h)-f(x_n)}{h}$ l'approximation étant d'autant meilleur que h est petit.

En prenant $h = \dfrac{1}{N}$, cela s'écrit $f'(x_n) \simeq \dfrac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{h}$
et l'équation $f' = f$ devient approximativement en chaque point x_n :

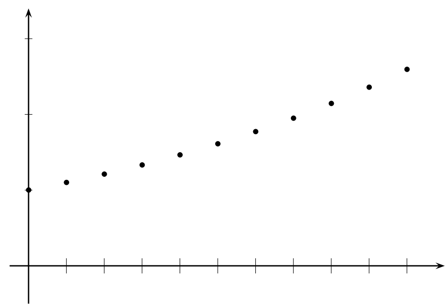
$$f(x_n) = f'(x_n) \simeq \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{h} \qquad \text{soit aussi :} \qquad f(x_{n+1}) = (1+h)f(x_n)$$

Si on note : $y_n = f(x_n)$, la suite (y_n) est ainsi définie par $y_0 = f(x_0) = f(0) = 1$, puis, pour tout entier $1 \leq n \leq N$, $y_{n+1} = (1+h)y_n$.

Avec $N = 4$ points ; $h = \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{4} = 0,25$.
$y_0 = 1$
$y_1 = (1+h)y_0 = 1,25$
$y_2 = (1+h)y_1 = (1+h)^2 y_0 \simeq 1,56$
$y_3 = (1+h)y_2 = (1+h)^3 y_0 \simeq 1,95$
$y_4 = (1+h)y_3 = (1+h)^4 y_0 \simeq 2,44$



Avec $N = 10$ points ; $h = \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{10} = 0,1$.
$y_0 = 1$
$y_1 = (1+h)y_0 = 1,1$
$y_2 = (1+h)y_1 = (1+h)^2 y_0 \simeq 1,21$
$y_3 = (1+h)y_2 = (1+h)^3 y_0 \simeq 1,33$
$y_4 = (1+h)y_3 = (1+h)^4 y_0 \simeq 1,46$
$y_5 = \dots$

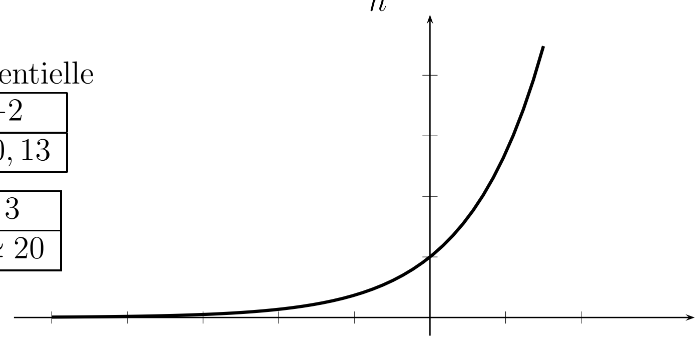


Remarque : Cette méthode d'approximation d'une fonction solution d'une équation différentielle s'appelle la méthode **des différences finies**, car on approxime l'expression de la dérivée :
$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ par une différence **finie** : $f'(x) \simeq \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Courbe représentative de la fonction exponentielle

x	-5	-4	-3	-2
$\exp(x)$	$\simeq 6.10^{-3}$	$\simeq 0,01$	$\simeq 0,04$	$\simeq 0,13$

x	-1	0	1	2	3
$\exp(x)$	$\simeq 0,36$	1	$\simeq 2,718$	$\simeq 7,4$	$\simeq 20$



III - Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété *Pour tous réels x et y,* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Démonstration : Soit $y \in \mathbb{R}$ et φ la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ car exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et $\varphi = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = \exp(w(x))$, où $w(x) = x+y$, odnc $w'(x) = 1+0 = 1$ et donc, $u'(x) = w'(x)\exp'(w(x)) = \exp(x+y)$, et

$v(x)=\exp(x)$, donc $v'(x)=\exp(x)$. On a alors,

$$\varphi'(x)=\frac{\exp(x+y)\exp(x)-\exp(x+y)\exp(x)}{[\exp(x)]^2}=0$$

On en déduit que φ est contante sur $\mathbb{R}$. Or, $\varphi(0)=\dfrac{\exp(0+y)}{\exp(0)}=\exp(y)$.

Ainsi, pour tout réel x, $\varphi(x)=\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}=\exp(y) \iff \exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$.

Propriété *Positivité de l'exponentielle*
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)=\exp\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\times\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)=\left[\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2\geq 0$, et donc, comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $\exp(x)>0$ pour tout x réel.

Propriété *Croissance de l'exponentielle La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\exp'(x)=\exp(x)>0$ d'après la propriété précédente. D'où la propriété.

Corollaire *Pour tous réels a et b,*

- $\exp(a)=\exp(b)\iff a=b$
- $\exp(a)<\exp(b)\iff a<b$ *(conservation de l'ordre)*

Propriété *Inverse de l'exponentielle Pour tout x réel,* $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$

Démonstration : Pour tout réel x, $\exp(x+(-x))=\exp(0)=1$, mais par ailleurs aussi,
$\exp(x+(-x))=\exp(x)\times\exp(-x)$, et donc, $\exp(x)\exp(-x)=1$, d'ou le résultat.

Propriété *Pour tous réels x et y,* $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(y)}{\exp(y)}$

Démonstration : Pour tous réels x et y, $\exp(x-y)=\exp(x+(-y))=\exp(x)\exp(-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Propriété *Pour tous réels x_1, x_2, ..., x_n,* $\exp(x_1+x_2+\cdots+x_n)=exp(x_1)\exp(x_2)\dots\exp(x_n)$

Démonstration : Par récurrence sur n : soit $P(n)$ la propriété "pour n nombres réels quelconques x_1, x_2, ..., x_n, on a $\exp(x_1+x_2+\cdots+x_n)=exp(x_1)\exp(x_2)\dots\exp(x_n)$"

Initialisation. La propriété est évidente pour $n=1$, et a été démontrée précédcemment pour $n=2$. pour n nombres réels quelconques $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a $\exp(x_1+x_2+\cdots+x_n)=exp(x_1)\exp(x_2)\dots\exp(x_n)$"

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie et considérons $n+1$ nombres $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ réels quelconques. Alors

$$\begin{aligned}\exp(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}) &= \exp\big([x_1+x_2+\cdots+x_n]+x_{n+1}\big)\\ &= \exp(x_1+x_2+\cdots+x_n)\exp(x_{n+1})\\ &= exp(x_1)\exp(x_2)\dots\exp(x_n)\exp(x_{n+1}) \quad \text{d'après} P(n)\end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est aussi vraie. On a ainsi démontré la propriété d'après le principe de récurrence.

Corollaire *Pour tout réel x et tout entier relatif n,* $\exp(nx) = \Big[\exp(x)\Big]^n$

Les propriétés de l'exponentielle coïncident avec les règles de calcul sur les puissances.

En fait, pour tout entier n, on peut écrire $\exp(n) = \exp(n \times 1) = \Big[\exp(1)\Big]^n = e^n$, où on a noté $e = \exp(1) \simeq 2,718$.

Cette écriture se généralise :

Définition *On note pour tout x réel,* $\exp(x) = e^x$*, qui se lit "e exponentielle x", ou "e exposant x".*

Exercice 4 Simplifier les expressions : a) $(e^x)^5 e^{-2x}$ b) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$ c) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$

Exercice 5 Démontrer que pour tout réel x,

a) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1} = e^x \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}$. b) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.

c) $\dfrac{e^x-1}{e^x+1} = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ d) $e^{-x} - e^{-2x} = \dfrac{e^x-1}{e^{2x}}$

Exercice 6 Résoudre les équations et inéquations :

• $(E_1) : e^x = 1$ • $(E_2) : e^{2x} = e$ • $(E_3) : e^x = e^{-x}$ • $(E_4) : e^{x^2} = (e^{-x})^2 e^3$ • $(E_5) : e^{2x+1} = e^{\frac{6}{x}}$

• $(I_1) : e^x > e$ • $(I_2) : e^{2x} \leq 1$ • $(I_3) : (e^x)^3 \leq \dfrac{1}{e}$ • $(I_4) : e^x - \dfrac{1}{e^x} > 0$ • $(I_5) : e^{x^2} \geq e^{-x-1}$

Exercice 7 On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit a un réel. Déterminer l'équation de la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.
2. Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite T

   (Indication : on pourra étudier les variations de la fonction φ définie par $\varphi(x) = e^x - y$, où y désigne l'équation de la tangente T_a).

Exercice 8 Étudier le sens de variation des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ 2) $f(x) = e^{2x} - 2x$ 3) $f(x) = e^{x^2} - x^2$ 4) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 5) $f(x) = (2x+3)e^{-2x}$

IV - Limites de la fonction exponentielle

Propriété *Limites de l'exponentielle* • $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, • $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$,

Démonstration : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = e^x - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$, car $e^0 = 1$ et la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
On en déduit que f est croissante. Or, $f(0) = 1$, donc, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 1 > 0$, c'est-à-dire, $e^x > x$.

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Par ailleurs, comme pour tout réel x, $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$, et que d'après ce qui précède, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, et donc que la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fontion exponentielle.

Exercice 9 Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x)=e^{-3x}$ b) $g(x)=e^x+e^{-x}$ c) $h(x)=x+e^x$ d) $k(x)=e^{2x}+e^x+1$

e) $l(x)=e^{3x}-e^x$ f) $m(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+2}$ g) $n(x)=\dfrac{-2e^x}{1+e^x}$

Propriété *Croissance comparée de l'exponentielle*

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ *(2)* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

Démonstration : (1) Soit φ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\varphi(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$. φ est dérivable sur $[0;+\infty[$, et $\varphi'(x)=e^x-x$.

De même, φ' est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\varphi"(x)=e^x-1\geq 0$, car $x\mapsto e^x$ étant croisssante, si $x\geq 0$, $e^x\geq e^0=1$.

On en déduit que φ' est croissante. Or $\varphi'(0)=0$, et donc $\varphi'\geq 0$, d'où φ est croissante. De plus, $\varphi(0)=1$, et donc, on déduit aussi que φ est positive sur $[0;+\infty[$, c'est-à-dire que $\varphi(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}\geq 0$, soit aussi $\dfrac{e^x}{x}\geq\dfrac{x}{2}$.

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$, et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

(2) On efectue le changement de variable $X=-x$; alors, $xe^x=-Xe^{-X}=-\dfrac{X}{e^X}$.

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{X\to+\infty}-\frac{X}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{-1}{\frac{e^X}{X}}=0.$$

Propriété *Pour tout entier naturel n non nul,* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$

"Le comportement à l'infini de l'exponentielle est prépondérant (l'emporte) sur les polynômes".

Exercice 10 Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^2+2-e^x$ b) $g(x)=\dfrac{2e^x-x}{x^2}$ c) $h(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

d) $l(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$ e) $k(x)=\dfrac{\sqrt{e^x+2}}{x}$ f) $t(x)=\dfrac{e^{2x}+x^2}{x^2+x-3}$

Exercice 11 A l'aide d'un changement de variable, étudier la limite en $+\infty$ des fonctions :

a) $f(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{x}$ b) $g(x)=\dfrac{2e^{x^2-1}}{x^2}$ c) $f(x)=x^3e^{-\sqrt{x}}$.

V - Récapitulatif

$\exp'=\exp$ et donc, pour toute fonction u, $(e^u)'=u'e^u$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$; $e^0=1$; $e^1=e\simeq 2,718$

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante.

Pour tous réels a et b, $e^{a+b}=e^ae^b$; $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$; $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^b=e^{ab}$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x=0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$,

Exercice 12 Etudier sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes (sens de variations et limites) :

a) $f(x) = e^{-x}$ b) $g(x) = e^x + e^{-x}$ c) $h(x) = x + e^x$ d) $k(x) = e^{3x} - 3e^x$
e) $l(x) = e^{-x^2}$ f) $m(x) = (0,4x - 2)e^{-0.1x}$ g) $n(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

Exercice 13 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2e^x$ et $g(x) = (x^2 - x - 1)\,e^x$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.
2. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Déterminer les limites de f et g en $-\infty$ et $+\infty$.
4. Dresser les tableaux de variations de f et g.

Exercice 14 Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'inétéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capeteur de 1m de longueur.

Cette température est modélisée par : $T(x) = 170 - 150e^{-0,6x}$, où $x \in [0;1]$ est la distance, en mètres, parcourue par le fluide depuis son entré dans le capteur, et $T(x)$ est la température en °C.

1. Déterminer la température à l'entrée du capteur.
2. (a) Etudier les variations de la température T sur $[0;1]$.
   (b) En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.
   (c) Tracer dans un repère la courbe représentant la température T.

Exercice 15 *(Extrait Bac)* Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = (x-1)\left(2 - e^{-x}\right)$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm et Δ la droite d'équation $y = 2x - 2$.

1. a) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ.
2. (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = xe^{-x} + 2\left(1 - e^{-x}\right)$.
   (b) En déduire que, pour tout réel x positif, $f'(x) \geqslant 0$.
   (c) Préciser la valeur $f(0)$, puis établir le tableau de variation de f.
3. Avec le plus grand soin, tracer $\mathcal{C}$ et Δ dans le même repère.
4. Déterminer le point de A de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ.
   Tracer cette tangente dans le repère précédent.

Exercice 16 Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(1) Pour tout réel x, $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$
(2) Pour tout réel x, $f(x) = g'(x)$
(3) $f(0) = 1$.

1. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.
   b) Calculer $g(0)$.
2. En dérivant la relation (1), montrer que $g(x) = f'(x)$.
3. On pose $u = f + g$ et $v = f - g$.
   a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$.
   b) Démontrer que $u' = u$ et que $v' = -v$.

c) On déduit de ce qui précède que $u(x) = Ae^x$ et $v(x) = Be^{-x}$, A et B étant deux réels.
En déduire alors f et g.

Exercice 17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonale.

1. Démontrer que f est une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
2. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{1 + e^{-x}}$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) - (x - 1) = \dfrac{2}{e^x + 1}$.
   En déduire que la droite d'équation Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   b) Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

Exercice 18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$, et on désigne par Γ sa courbe représentative.

1. Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^x$.
3. a) Déterminer les limites de f en $+\infty$.
   b) Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$, et tracer l'allure de Γ.

Exercice 19 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)e^{-2x}$.
$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
   b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. a) Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
   b) Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 20 (*(d'après Bac S)* g_1 et g_2 sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_1(x) = xe^{-x} \quad \text{et,} \quad g_2(x) = x^2 e^{-x}$$

1. a) Etudier les limites de g_1 et g_2 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.
   b) Etudier le sens de variation de g_1 et g_2.
2. Dans un repère orthonormal du plan, on note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentatives de g_1 et g_2.
   a) Préciser la position relative des deux courbes.
   b) Tracer les deux courbes.
3. a) Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse a (a réel).
   b) Cette tangente coupe l'axe des ordonnées en un point N.
   Déterminer en fonction de a, l'ordonnée de N.