

**Exercice 1**  $ABCDEFGH$  est un cube.

- 1) Déterminer dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  les coordonnées de tous les points.
- 2) Déterminer les longueurs  $AC$ ,  $OG$  et  $BG$ .
- 3) Le triangle  $HAF$  est-il rectangle en  $A$ ?

**Exercice 2** Soit, dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , les points  $A(1; 5; 2)$ ,  $B(-2; 3; 4)$ ,  $C(-2; -2; 0)$  et  $D(7; -3; 1)$ .

1. Calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$ . Ces vecteurs sont-ils colinéaires?
2. Calculer les longueurs  $AB$  et  $AC$ .
3. Déterminer les coordonnées des milieux des segments  $[AB]$  et  $[CD]$ .
4. Calculer les coordonnées des vecteurs  $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$  et  $\vec{v} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BC}$ .
5. Déterminer les coordonnées du point  $K$  tel que  $ABCK$  soit un parallélogramme.
6. Calculer les coordonnées du point  $A'$  symétrique de  $A$  par rapport à  $B$ .

**Exercice 3** Les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  sont-ils coplanaires?

**Exercice 4** Les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  sont-ils coplanaires?

**Exercice 5** On considère la droite  $d$  passant par  $A(-2; 3; 1)$  et  $B(5; 2; -2)$ .

1. Donner un vecteur directeur  $\vec{u}$  de la droite  $d$ .
2. Donner alors une représentation paramétrique de la droite  $d$ .
3. Les points  $M(-9; 4; 4)$  et  $N(12; 1; 1)$  appartiennent-ils à cette droite?

**Exercice 6** Dans un RON, on donne les points  $A(1; -2; 3)$  et  $B(0; 0; 1)$ .

- a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$ .
- b) Les points  $C(-3; 6; -5)$  et  $D(2; -5; 5)$  appartiennent-ils à cette droite?

**Exercice 7** Les droites  $d$  et  $d'$  définies par les représentations paramétriques suivantes sont-elles orthogonales?

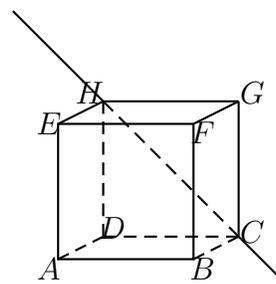
$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et,} \quad \begin{cases} x = 3t \\ y = t + 2 \\ z = -3t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**Exercice 8** Démontrer que les droites  $d$  et  $d'$  définies par les représentations paramétriques suivantes sont sécantes :

$$\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et,} \quad \begin{cases} x = -11 + 2t \\ y = 10 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

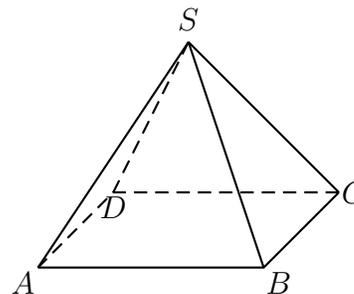
1. Ecrire une représentation paramétrique du plan  $(A; \vec{u}, \vec{v})$
2. Les points  $B(1; 2; 3)$  et  $C(0; -1; 4)$  appartiennent-ils à ce plan ?
3. Déterminer l'intersection  $d$  de ce plan et du plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
Préciser un point et un vecteur directeur de  $d$ .

**Exercice 10**  $ABCDEFGH$  est un cube. Déterminer le projeté orthogonal  $A'$  du point  $A$  sur la droite  $(HC)$ .  
(Indication : quelle est la nature du triangle  $AHC$ , et que représente dans ce triangle la droite  $(AA')$ )



**Exercice 11**  $SABCD$  est une pyramide à base carrée de sommet  $S$  et dont toutes les arêtes ont la même longueur  $a$ . Calculer, en fonction de  $a$ , les produits scalaires suivants :

- a)  $\vec{SA} \cdot \vec{SB}$       b)  $\vec{SA} \cdot \vec{SC}$   
c)  $\vec{SA} \cdot \vec{AC}$       d)  $\vec{SC} \cdot \vec{AB}$

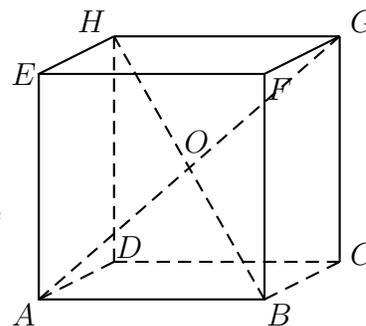


**Exercice 12**  $ABCDEFGH$  est un cube de centre  $O$  et d'arête  $a$ .

- 1) Calculer, en fonction de  $a$ , les produits scalaires :

a)  $\vec{AE} \cdot \vec{BG}$     b)  $\vec{HB} \cdot \vec{BA}$     c)  $\vec{AB} \cdot \vec{AO}$

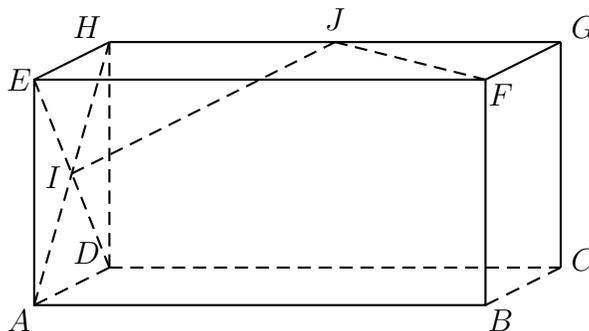
- 2) Déterminer dans le repère  $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  les coordonnées de tous les points et retrouver a).  
3) Déterminer une mesure de l'angle  $\widehat{HOG}$ .



**Exercice 13**  $ABCDEFGH$  est un parallélépipède rectangle tel que  $AD = AE = 1$  cm et  $AB = 2$  cm

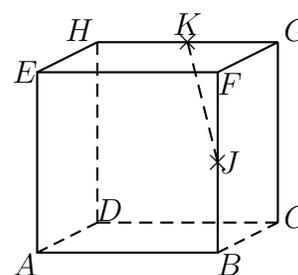
$I$  est le centre du carré  $ADHE$  et  $J$  le milieu du segment  $[GH]$ .

- a) Donner, dans le RON  $(A; \frac{1}{2}\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ , les coordonnées des points  $I, J$  et  $F$ . En déduire le produit scalaire  $\vec{JI} \cdot \vec{JF}$ .  
b) Déterminer l'angle, au dixième de degré près,  $\widehat{IJF}$ .



**Exercice 14**  $ABCDEFGH$  est un cube d'arête  $a$ .

$J$  et  $K$  sont les milieux respectifs des segments  $[FB]$  et  $[GH]$ .  
Calculer  $JK$ .



**Exercice 15** On considère dans un RON, les points  $A(-1; -1; -1)$ ,  $B(0; -2; 0)$  et  $C(-2; 1; 0)$ .

Montrer que le vecteur  $\vec{n}(3; 2; -1)$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$ , et déterminer une équation de ce plan.

$\mathcal{L}$  est le plan d'équation cartésienne :  $-2x + y + z - 4 = 0$ .

- Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  tel que le projeté orthogonal de l'origine  $O$  sur  $\mathcal{P}$  soit le point  $A$ .
- Montrer que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{L}$  sont perpendiculaires.

**Exercice 17** Dans un RON, le plan  $\mathcal{P}$  a pour équation  $2x - y + 3z - 1 = 0$ , et le point  $A$  a pour coordonnées  $A(0; -1; -4)$ . On note de plus  $H$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

- Déterminer les coordonnées d'un vecteur  $\vec{n}$  normal à  $\mathcal{P}$ .
- Justifier l'existence d'un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$ .  
Traduire cette relation en termes de coordonnées.
- Déterminer  $k$  en exprimant que  $H$  appartient à  $\mathcal{P}$ .  
En déduire les coordonnées de  $H$  et la distance  $AH$  de  $A$  au plan  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 18**

- Le système 
$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 4z - 6 = 0 \end{cases}$$
 est-il un système d'équations cartésiennes d'une droite  $d$ ?
- Déterminer  $x$  et  $y$  en fonction de  $z$ , puis en déduire une équation paramétrique de  $d$ , en introduisant le paramètre  $t = z$ .  
Donner alors un point et un vecteur directeur de  $d$ .

**Exercice 19** Dans un RON, les plans  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  ont pour équations cartésiennes

$$\mathcal{P} : x + y + z + 3 = 0, \quad \mathcal{L} : 2x + 2y + 2z + 7 = 0, \quad \text{et} \quad \mathcal{R} : 3x - y + 2 = 0$$

Etudier l'intersection des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{L}$ , puis des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{R}$ .

**Exercice 20** Dans un RON, le plan  $\mathcal{P}$  a pour équation  $5x + y - z + 3 = 0$  et la droite  $d$  pour représentation paramétrique 
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer l'intersection de  $d$  et  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 21** Les points  $A$  et  $B$  ont pour coordonnées respectives  $(2; -1; 5)$  et  $(-1; 2; 3)$ .

Etudier l'intersection de la droite  $(AB)$  avec le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $5x - 3y - z = 1$ .

**Exercice 22** Déterminer l'intersection des plans  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  d'équations respectives :

$$3x + 3y + z + 2 = 0, \quad y + z - 5 = 0 \quad \text{et}, \quad 2z - 8 = 0.$$

**Exercice 23** Déterminer l'intersection des plans  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  d'équations respectives :

$$4x + 3y + z + 2 = 0, \quad x + 2y + z - 5 = 0 \quad \text{et}, \quad 3x + 5y + 2z - 9 = 0.$$

**Exercice 24** (*D'après Bac 2003*)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ont pour coordonnées respectives  $A(3; -2; 2)$ ,  $B(6; 1; 5)$ ,  $C(6; -2; -1)$  et  $D(0; 4; -1)$ .

- Montrer que le triangle  $ABC$  est un triangle rectangle.
- Montrer que la droite  $(AD)$  est perpendiculaire au plan  $(ABC)$ .

4. Montrer que l'angle géométrique  $\widehat{BDC}$  a pour mesure  $\frac{\pi}{4}$  en radians.

### Exercice 25 ROC (D'après Bac 2005)

**Partie A.** Soit  $[KL]$  un segment de l'espace. On note  $I$  son milieu. On appelle plan médiateur de  $[KL]$  le plan perpendiculaire en  $I$  à la droite  $(KL)$ .

**Démontrer** que le plan médiateur de  $[KL]$  est l'ensemble des points de l'espace équidistants des points  $K$  et  $L$ .

**Partie B.** Dans un RON, on considère les points  $A(4; 0; -3)$ ,  $B(2; 2; 2)$ .

Démontrer que le plan médiateur de  $[AB]$  a pour équation  $4x - 4y - 10z - 13 = 0$ .

**Exercice 26**  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un RON.  $\mathcal{S}$  est la sphère de centre  $J(0; 1; 0)$  et de rayon 1.  $u$  et  $v$  sont deux réels,  $M$  et  $N$  sont les points définis par  $\overrightarrow{OM} = u\vec{k}$  et  $\overrightarrow{AN} = v\vec{i}$  où  $A(0; 2; 0)$ .

1. Donner une équation de la sphère  $\mathcal{S}$ .
2. a) Quelles sont les coordonnées des points  $M$  et  $N$ ?  
b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(MN)$ .
3. Montrer que la droite  $(MN)$  est tangente à la sphère  $\mathcal{S}$  si, et seulement si,  $u^2v^2 = 4$ .