I - Rappels - Produit scalaire dans le plan

Définition *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, alors* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

<u>Conséquence :</u> Le carré scalaire de $\vec{u}$ est : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$, car $\cos(\vec{u},\vec{u}) = \cos(0) = 1$.

Propriété *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et tout réel k,*

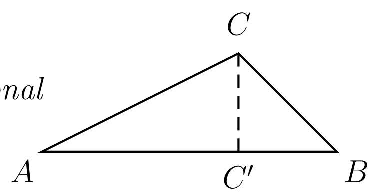
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Exercice 1 A, B, C et D sont quatre points quelconques du plan.

En utilisant la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

Propriété *(Produit scalaire et projection)*

Soit A, B et C trois points, et C' le projeté orthogonal de C sur (AB), alors,



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} = \begin{cases} AB\times AC' \textit{ si } \overrightarrow{AB} \textit{ et } \overrightarrow{AC'} \textit{ ont même sens} \\ -AB\times AC' \textit{ si } \overrightarrow{AB} \textit{ et } \overrightarrow{AC'} \textit{ ont un sens contraire} \end{cases}$$

Propriété $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$

<u>Démonstration:</u>

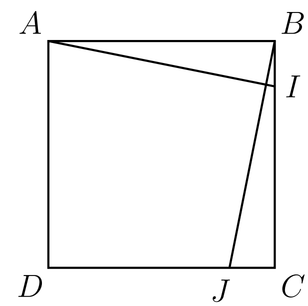
$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

d'où, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$ □

Propriété $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff \begin{cases} \vec{u}=\vec{0} \ \ ou\,,\ \vec{v}=\vec{0} \\ ou\,,\ \vec{u}\perp\vec{v}\end{cases}$

Exercice 2 Soit $ABCD$ un carré, et I et J les points tels que $\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{CD}$.

Démontrer que les droites (AI) et (BJ) sont perpendicualires.



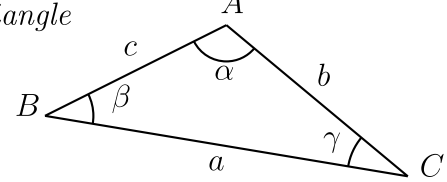
Exercice 3 A et B sont deux points du plan tels que $AB=3$ cm.

a) Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

b) Donner un point H de (AB) tel que $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=-6$.
Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-6$.

Théorème *(Al-Kashi, ou Pythagore généralisé) Dans un triangle ABC quelconque, on a :*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$$



Corollaire *(Théorème de Pythagore) ABC est rectangle en A si et seulement si $a^2 = b^2 + c^2$.*

Démonstration: $a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2$

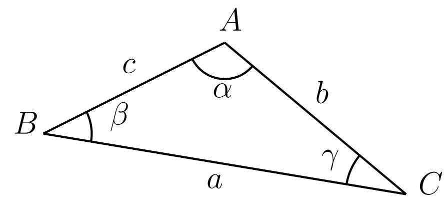
$$\begin{aligned} &= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} \\ &= c^2 + b^2 + 2\cos(\pi - \alpha) \\ &= c^2 + b^2 - 2\cos\alpha \end{aligned}$$

Le théorème de Pythagore est alors un corollaire direct :
ABC rectangle en $A \iff \alpha = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \iff \cos\alpha = 0 \iff a^2 = b^2 + c^2.$ □

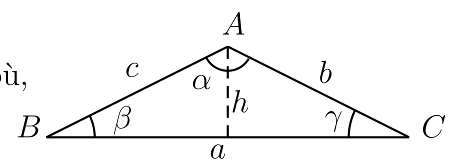
Théorème *(Formule des sinus) L'aire d'un triangle ABC quelconque, est donnée par*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

et de plus, $$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



Démonstration: L'aire de ABC est $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ah$, avec $h = c\sin\beta$, d'où, $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ac\sin\beta$.



En procédant de même (par permutation circulaire), on obtient les autres formules.

Enfin, en divisant chaque terme par $\dfrac{1}{2}abc$, on obtient : $\dfrac{\mathcal{A}}{\frac{1}{2}abc} = \dfrac{\sin\gamma}{c} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{a}$ □

Exercice 4 Soit ABC un triangle tel que $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm et $\widehat{A} = 120\,°$.
Calculer toutes les longueurs et angles de ce triangle.

II - Produit scalaire et géométrie analytique du plan

1) Expression du produit scalaire

Propriété *Soit dans un repère orthonormal, $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$. Alors, $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$*

Remarque : On a alors aussi, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$, soit, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 5 Reprendre l'exercice 2, et donner dans le repère orthonormal $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ les coordonnées de tous les points de la figure.
Démontrer alors que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont orthogonaux.

Exercice 6 Dans un RON, on considère les points $A(1;1)$, $B(-1;2)$ et $C(-3;0)$.
Donner une valeur de $\widehat{ABC}$ à $0,1$ degré près.

Définition *Dire qu'un vecteur $\vec{n}$ est normal à une droite d signifie que la direction de $\vec{n}$ est orthogonal à d.*

Conséquence :
- Ainsi, si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d, on a $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.
- Si A est un point de la droite d, alors d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Propriété *(1) Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.*

(2) L'ensemble d d'équation $ax + by + c = 0$, où a et b sont des réels non tous les deux nuls, est la droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$.

Démonstration: Soit $\vec{n}(a;b)$, $A(x_A;y_A)$ un point de d, et $M(x;y)$ un point quelconque du plan, alors
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_B)$, donc,
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_A) + b(y - y_B) = 0 \iff ax + by + c = 0$, avec $c = -ax_A - by_B$. □

Remarque : Si $b \neq 0$, on peut retrouver l'équation réduite de la droite d :

$$ax + by + c = 0 \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\ .$$

Exercice 7

ABC est un triangle tel que $A(3;-2)$, $B(0;-1)$ et $C(1;3)$.

a) Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

b) Déterminer une équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

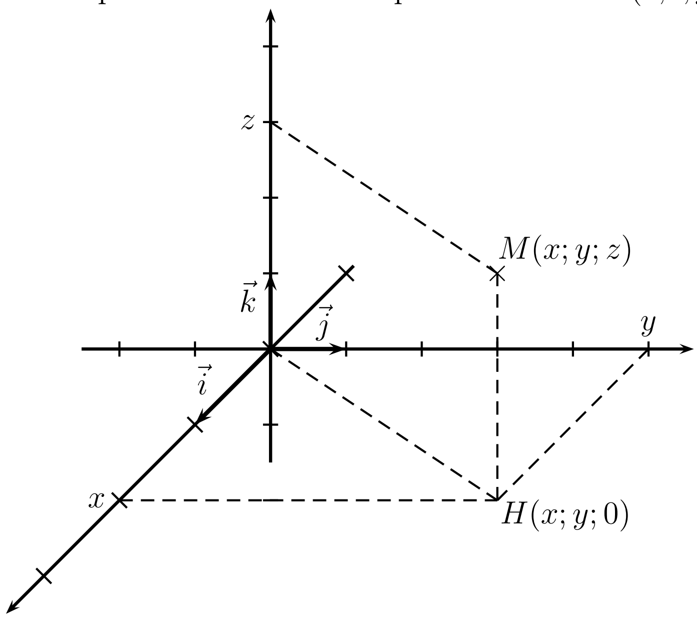
Exercice 8

Dans un RON, on considère les points $A(-3;0)$, $B(3;-1)$ et $C(1;5)$.

a) Déterminer une équation de la droite d_1 perpendiculaire à (AB) et passant par C.

b) Déterminer une équation de la droite d_2 parallèle à (AB) et passant par C (on pourra tout d'abord déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à $\overrightarrow{AB}$).

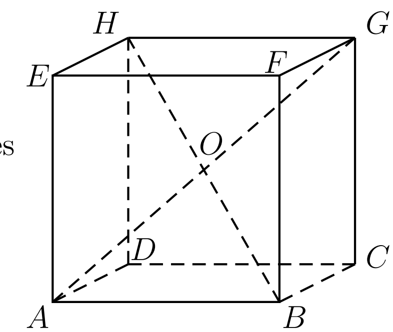
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.



Pour tout point M de l'espace, il existe un **unique** triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

On note $M(x;y;z)$ les coordonnées du point M.



Exercice 1 $ABCDEFGH$ est un cube.

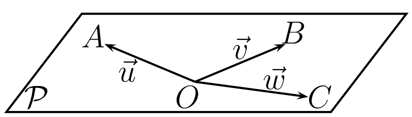
1) Déterminer dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ les coordonnées de tous les points.
2) Déterminer les longueurs AC, OG et BG.
3) Le triangle HAF est-il rectangle en A ?

Exercice 2 Soit, dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(1;5;2)$, $B(-2;3;4)$, $C(-2;-2;0)$ et $D(7;-3;1)$.

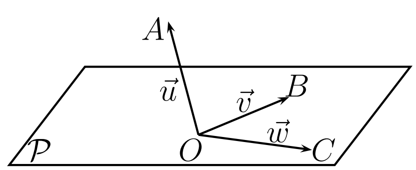
1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?
2. Calculer les longueurs AB et AC.
3. Déterminer les coordonnées des milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$.
4. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$ et $\vec{v} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BC}$.
5. Déterminer les coordonnées du point K tel que $ABCK$ soit un parallélogramme.
6. Calculer les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à B.

1) Vecteurs coplanaires

Définition *(Vecteurs coplanaires) Dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires signifie qu'ils peuvent être placés dans un même plan : les points O, A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ sont dans un même plan.*



$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires



$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires *que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.*

Exercice 3 Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 4 Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Propriété *Si $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, alors, pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe un unique triplet $(a;b;c)$ tel que*

$$\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}\ .$$

Pour tout point A, $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{v})$ forme alors un repère de l'espace.

Exemple : $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace, 2 à 2 orthogonaux, et forment un repère (orthonormé) de l'espace : tout vecteur $\vec{t}$ s'exprime selon ses coordonnées $(x;y;z)$ dans ce repère :

$$\vec{t} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ .$$

2) Représentation paramétrique d'une droite

La droite d passant par le point $A\,(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, $M(x;y;z) \in d$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, c'est-à-dire tel que $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{array}\right.$ *(ou "$M = A + t\vec{u}$").*

Définition *Le système précédent est* **une représentation paramétrique** *de la droite d (t étant le paramètre de cette représentation).*

Exercice 5 On considère la droite d passant par $A(-2;3;1)$ et $B(5;2;-2)$.

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.
2. Donner alors une représentation paramétrique de la droite d.
3. Les points $M(-9;4;4)$ et $N(12;1;1)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 6 Dans un RON, on donne les points $A(1;-2;3)$ et $B(0;0;1)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Les points $C(-3;6;-5)$ et $D(2;-5;5)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 7 Les droites d et d' définies par les représentations paramétriques suivantes sont-elles orthogonales ?

$$\left\{\begin{array}{lcrcr} x &=& 2t &-& 1 \\ y &=& -3t &+& 2 \\ z &=& t && \end{array}\right.,\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{et,} \qquad \left\{\begin{array}{lcrcr} x &=& 3t && \\ y &=& t &+& 2 \\ z &=& -3t &-& 2 \end{array}\right.,\ t \in \mathbb{R}$$

Exercice 8 Démontrer que les droites d et d' définies par les représentations paramétriques sont sécantes :

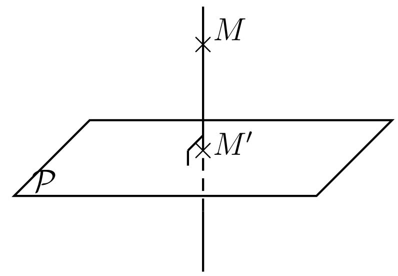
$$\begin{cases} y = 2 + t \\ z = 1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et,} \quad \begin{cases} y = 10 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Exercice 9 Soit, dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $A(-1;1;2)$, $\vec{u}(1;0;1)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{2};-1;1\right)$.

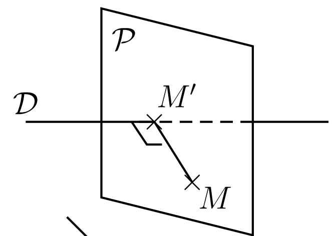
1. Ecrire une représentation paramétrique du plan $(A;\vec{u},\vec{v})$
2. Les points $B(1;2;3)$ et $C(0;-1;4)$ appartiennent-il à ce plan ?
3. Déterminer l'intersection d de ce plan et du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   Préciser un point et un vecteur directeur de d.

IV - Produit scalaire dans l'espace

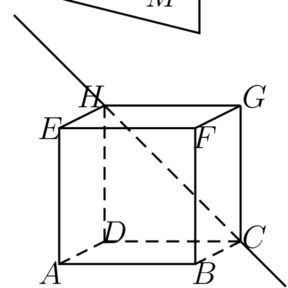
1) Projections orthogonales dans l'espace



Définition *Soit $\mathcal{P}$ un plan et M un point de l'espace.*
Le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$ est le point M' intersection de la droite Δ passant par M est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.



Définition *Soit $\mathcal{D}$ une droite et M un point de l'espace.*
Le projeté orthogonal de M sur la droite $\mathcal{D}$ est le point M' intersection de $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

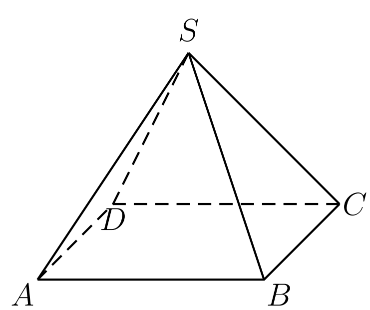


Exercice 10 $ABCDEFG$ est un cube. Déterminer le projeté orthogonal A' du point A sur la droite (HC).
(Indication : quelle est la nature du triangle AHC, et que représente dans ce triangle la droite (AA'))

2) Produit scalaire dans l'espace

Définition *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.*
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ calculé dans un plan contenant les points A, B et C.

Remarque : Si les points A, B et C ne sont pas alignés, il existe un unique plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C. Dans ce plan, $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un repère (a priori quelconque).



Exercice 11 $SABCD$ est une pyramide à base carrée de sommet S et dont toutes les arêtes ont la même longueur a. Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ *b)* $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$

c) $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$ *d)* $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan restent vraies dans l'espace :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$
- Le calcul du produit scalaire à l'aide d'une projection.
- Les règles de calcul : symétrie, associativité, distributivité, linéarité.

Il faut néanmoins adapter l'expression du produit scalaire en fonction des coordonnées :

Propriété *Dans un RON de l'espace, soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, alors,*

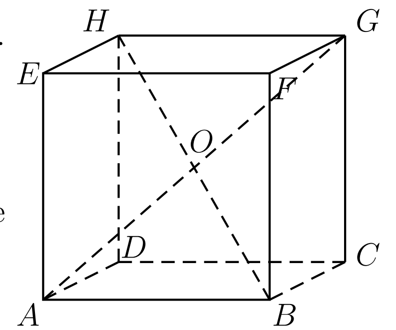
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Exercice 12 $ABCDEFGH$ est un cube de centre O et d'arête a.

1) Calculer, en fonction de a, les produits scalaires :

$$a)\ \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} \quad b)\ \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BA} \quad c)\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$$

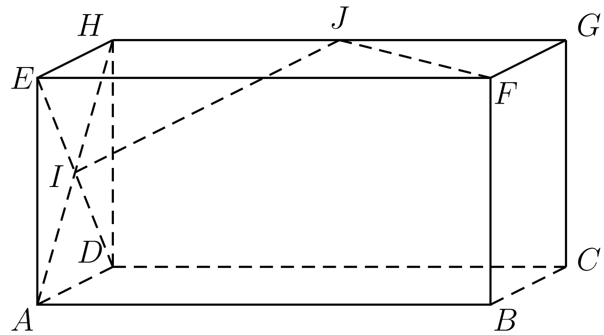
2) Déterminer dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ les coordonnées de tous les points et retrouver a).
3) Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{HOG}$.



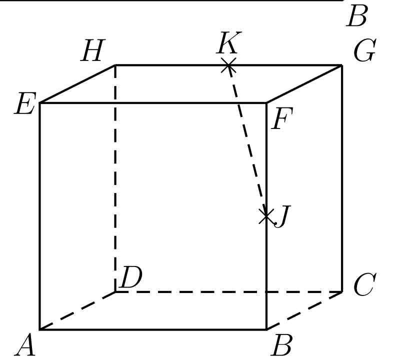
Exercice 13 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AD = AE = 1$ cm et $AB = 2$ cm

I est le centre du carré $ADHE$ et J le milieu du segment $[GH]$.

a) Donner, dans le RON $\left(A; \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées des points I, J et F. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JF}$.
b) Déterminer l'angle, au dixième de degré près, $\widehat{IJF}$.



Exercice 14 $ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.
J et K sont les milieux respectifs des segments $[FB]$ et $[GH]$.
Calculer JK.



VI - Orthogonalité dans l'espace

1) Orthogonalité de deux droites

Définition *Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles menéees par un point quelconque sont perpendiculaires.*

Remarque : Dans l'espace, deux droites peuvent n'être ni parallèles ni sécantes.

- *Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$*
- *Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales* **et** *sécantes.*

2) Droites et plans perpendiculaires

Définition *Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.*

Propriété *Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$ orthogonaux à $\vec{u}$.*

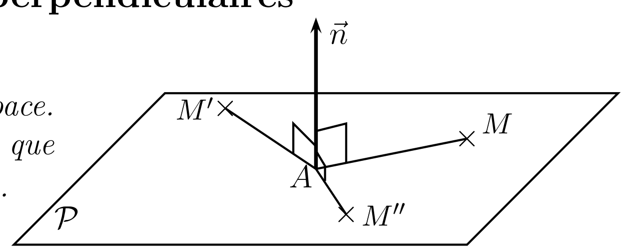
Démonstration:

- **La condition est nécessaire.** Si $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, elle est orthogonale à toutes les droites de $\mathcal{P}$.
  En particulier, il existe deux droites de $\mathcal{P}$, non parallèles et orthogonales à $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ est donc orthogonal aux vecteurs directeurs de ces droites qui sont des vecteurs de $\mathcal{P}$ non colinéaires.
- **Réciproque : la condition est suffisante.** Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ orthogonaux à $\vec{u}$.
  Alors, pour tout vecteur $\vec{z}$ de $\mathcal{P}$, les vecteurs $\vec{z}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, et donc, il existe α et β tels que $\vec{z} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$.
  On a alors, $\vec{u} \cdot \vec{z} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \cdot \vec{v} + \beta\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, ce qui montre que $\vec{u}$ et $\vec{z}$ sont orthogonaux, et donc, $\vec{z}$ étant un vecteur quelconque de $\mathcal{P}$, que $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$.

$\square$

Exercice 15 On considère dans un RON, les points $A(-1; -1; -1)$, $B(0; -2; 0)$ et $C(-2; 1; 0)$.
Montrer que le vecteur $\vec{n}(3; 2; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC), et déterminer une équation de ce plan.

3) Vecteur normal à un plan et plans perpendiculaires



Propriété *Soit $\vec{n}$ un vecteur et A un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan de vecteur normal $\vec{n}$.*

Corollaire *Dans un repère orthonormal,*

(1) Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

(2) Réciproquement, a, b, c et d étant quatre réels avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Démonstration: Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $M(x; y; z)$ alors $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$
et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$.
Ainsi, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff ax + by + cz + d = 0$, en posant $d = -ax_A - bx_B - cx_C$. $\square$

orthogonaux.

Exercice 16 L'espace est muni d'un RON $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. A est le point de coodonnées $(1;-5;7)$.
$\mathcal{L}$ est le plan d'équation cartésienne : $-2x+y+z-4=0$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tel que le projeté orthogonal de l'origine O sur $\mathcal{P}$ soit le point A.

b) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont perpendiculaires.

Exercice 17 Dans un RON, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $2x-y+3z-1=0$, et le point A a pour coordonnées $A(0;-1;-4)$. On note de plus H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$.

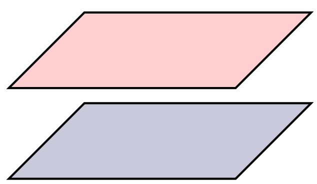
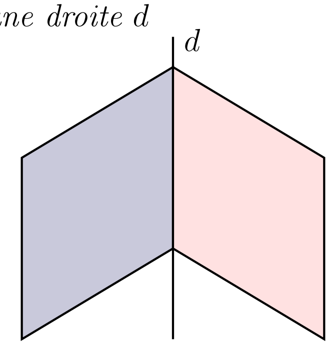
b) Justifier l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$.
Traduire cette relation en termes de coordonnées.

c) Déterminer k en exprimant que H appartient à $\mathcal{P}$.
En déduire les coordonnées de H et la distance AH de A au plan $\mathcal{P}$.

VII - Intersection de plans et de droites dans l'espace

1) Intersection de deux plans

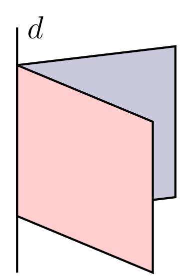
Propriété *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ deux plans de l'espace. Alors, trois cas sont possibles :*

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont strictement parallèles : ils n'ont aucun point commun 	*$\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont sécants suivant une droite d* 	*$\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont confondus : leur intersection est un plan* 

Propriété *Algébriquement, si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ ont pour équation respective $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$, leur intersection est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \end{array}\right.$$

Si les plans sont sécants, le système est alors un <u>système d'équations cartésiennes</u> représentant la droite d.



Exercice 18

a) Le système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & - & y & + & 3z & - & 1 & = & 0 \\ x & + & y & - & 4z & - & 6 & = & 0 \end{array}\right.$ est-il un système d'équations cartésiennes d'une droite d ?

b) Déterminer x et y en fonction de z, puis en déduire une équation paramétrique de d, en introduisnat le paramètre $t=z$.
Donner alors un point et un vecteur directeur de d.

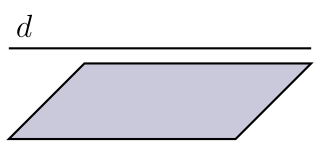
$$\mathcal{P}: \ x+y+z+3=0\,, \quad \mathcal{L}: \ 2x+2y+2z+7=0\,, \quad \text{et} \quad \mathcal{R}: \ 3x-y+2=0$$

Etudier l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$, puis des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.

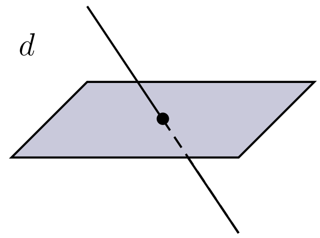
2) Intersection d'une droite et d'un plan

Propriété *Soit d une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Alors, trois cas sont possibles :*

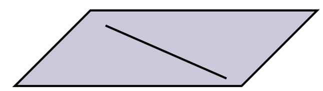
d et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles : ils n'ont aucun point commun



d et $\mathcal{P}$ sont sécants en un unique point A



d est contenue dans $\mathcal{P}$: leur intersection est la droite d



Exercice 20 Dans un RON, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $5x+y-z+3=0$ et la droite d pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=1-6t \\ z=3-t \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

Déterminer l'intersection de d et $\mathcal{P}$.

Exercice 21 Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2;-1;5)$ et $(-1;2;3)$.

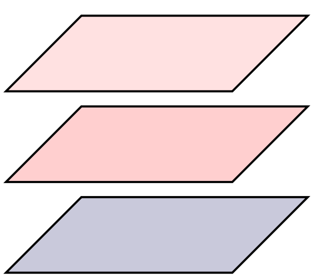
Etudier l'intersection de la droite (AB) avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $5x-3y-z=1$.

VIII - Intersection de trois plans

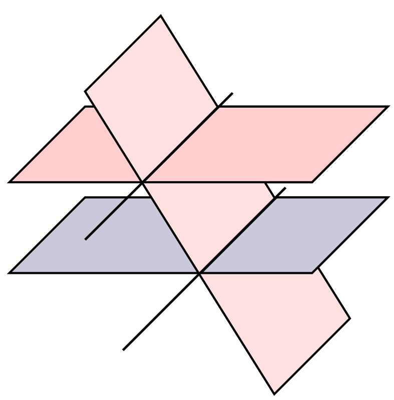
Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ trois plans de l'espace. Alors, six cas sont possibles :

- **Ils n'ont aucun point commun**

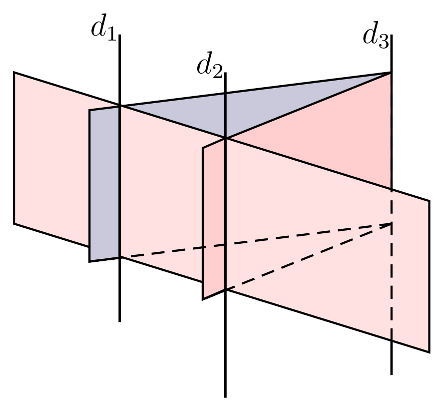
Les trois plans sont strictement parallèles

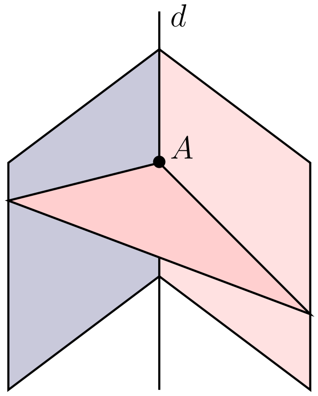
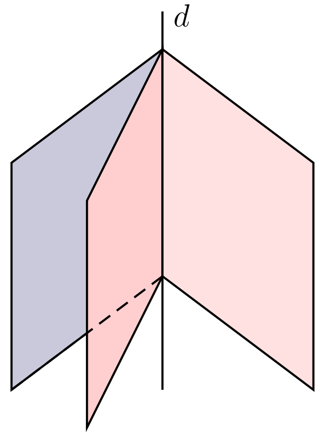


Deux plans sont strictement parallèles et sécants au troisième



Deux plans sont sécants suivant une droite, et le troisième plan est strictement parallèle à cette droite est un plan



d'intersection	**droite**	**plan** Les trois plans sont confondus
		

Propriété *Algébriquement, si dans un RON, les plans ont pour équations respectives $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d'=0$, et $a''x+b''y+c''z+d''=0$, alors leur intersection est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \\ a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système de trois équations à trois inconnues peut donc avoir : aucune solution, une unique solution, ou une infinité.

Exercice 22 Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ d'équations respectives :

$$3x+3y+z+2=0 \quad , \quad y+z-5=0 \ \text{ et, } \quad 2z-8=0\,.$$

Exercice 23 Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ d'équations respectives :

$$4x+3y+z+2=0 \quad , \quad x+2y+z-5=0 \ \text{ et, } \quad 3x+5y+2z-9=0\,.$$

IX - Théorème "du toit"

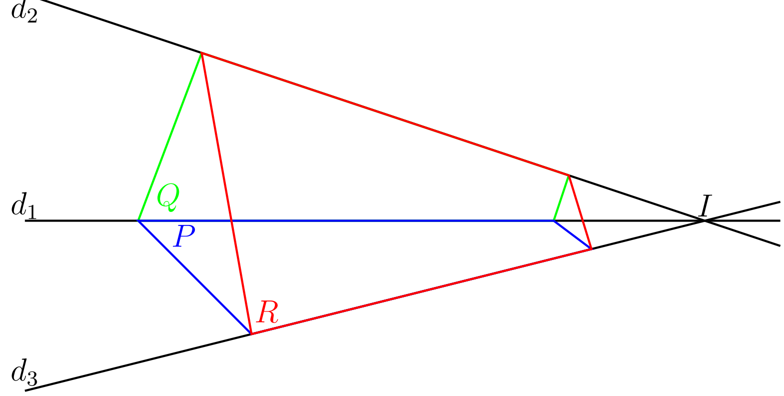
Le théorème dit du "toit" permet de démontrer que des droites dans l'espace sont parallèles ou concourantes en un point.

Théorème *Si trois plans P, Q et R de l'espace sont sécants deux à deux, alors les trois droites d'intersection sont concourantes ou parallèles.*

Démonstration: On note $d_1 = P\cap Q$ la droite intersection des plans P et Q, $d_2 = Q\cap R$ la droite intersection des plans Q et R, et $d_3 = P\cap R$ la droite intersection des plans P et R.

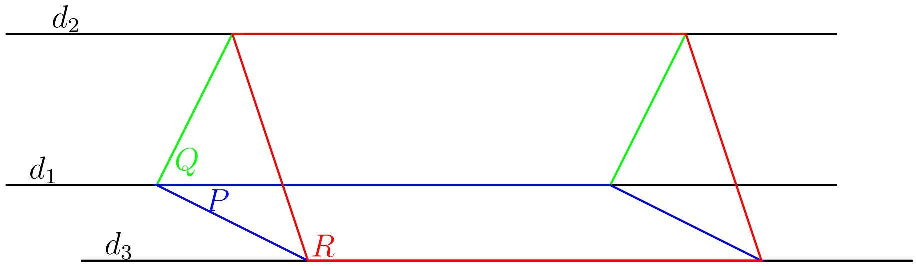
Considérons, par exemple, dans un premier temps, les droites d_1 et d_2. Comme ces deux droites sont coplanaires (elles appartiennent au même plan Q), seulement deux cas sont possibles : les droites d_1 et d_2 sont sécantes ou bien elles sont parallèles (si ces deux droites n'étaient pas coplanaires, elles pourraient aussi n'être ni sécantes, ni parallèles).

1$^{\text{er}}$ Cas : Supposons d_1 et d_2 sécantes.



Soit $I = d_1 \cap d_2$ le point d'intersection des deux droites d_1 et d_2.
On a alors, $I \in d_1$, donc $I \in P$, car $d_1 \subset P$, et de même, $I \in d_2$, donc $I \in R$, car $d_2 \subset R$.
Ainsi, I est un point commun aux plans P et R, soit $I \in P \cap R$.
Par conséquent, I appartient aussi à la droite d_3 qui est l'intersection des plans P et R.
On en conclut donc que le point I appartient à la fois aux trois droites d_1, d_2 et d_3, et donc que ces trois droites sont bien concourantes en I.

2ᵉ Cas : Supposons d_1 et d_2 parallèles.



Raisonnons par l'absurde et supposons que les droites d_1 et d_3 sont sécantes en un point J.
On aurait alors, $J \in d_1$, donc $J \in Q$, et de même, $J \in d_3$, donc $J \in R$.
Ainsi, J appartiendrait à la fois aux plans Q et R, et donc à la droite d_2, intersections de Q et R.
Le point appartiendrait alors aux droites d_1 et d_2, ce qui contredit notre hypothèse : d_1 et d_2 sont parallèles.
Les droites d_1 et d_3 ne peuvent donc pas être sécantes et, comme elles appartiennent au même plan P, elles sont donc parallèles.

Par conséquent, on en conclut que les trois droites d_1, d_2 et d_3 sont parallèles.

$\square$

Ce théorème s'utilise souvent sous la forme suivante, qui correspond au deuxième cas de la démonstration précédente.

Corollaire *Si deux plans sécants contiennent deux droites parallèles, leur intersection est une droite parallèle aux deux premières.*

X - Exercices

Exercice 24 *(D'après Bac 2003)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(3; -2; 2)$, $B(6; 1; 5)$, $C(6; -2; -1)$ et $D(0; 4; -1)$.

2. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
3. Calculer le volume du trétraèdre $ABCD$.
4. Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ en radians.

Exercice 25 **ROC** *(D'après Bac 2005)*

Partie A. Soit $[KL]$ un segment de l'espace. On note I son milieu. On appelle plan médiateur de $[KL]$ le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).

Démontrer que le plan médiateur de $[KL]$ est l'ensemble des points de l'espace équidistants des points K et L.

Partie B. Dans un RON, on considère les points $A(4;0;-3)$, $B(2;2;2)$.
Démontrer que le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation $4x-4y-10z-13=0$.

Exercice 26

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un RON. $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $J(0;1;0)$ et de rayon 1. u et v sont deux réels, M et N sont les points définis par $\overrightarrow{OM}=u\vec{k}$ et $\vec{AN}=v\vec{i}$ où $A(0;2;0)$.

1. Donner une équation de la sphère $\mathcal{S}$.
2. a) Quelles sont les coordonnées des points M et N ?

   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN).
3. Montrer que la droite (MN) est tangente à la sphère $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $u^2v^2=4$.