Fonctions logarithmes

Exercice 1 1. Résoudre les équations : • $e^x = 1$ • $e^x = e$ • $e^x = \dfrac{1}{e}$

2. a) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, l'équation $e^x = \lambda$ admet une unique solution.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution de l'équation $e^x = 2$.

I - La fonction logarithme népérien

Définition *La fonction logarithme népérien, notée* ln, *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ *qui à tout réel* $x > 0$ *associe le réel* x, *noté* $\ln(x)$, *dont l'exponentielle est* x.

Propriété
- *Pour tout réel* $x > 0$ *et tout réel* y, $x = e^y$ *équivaut à* $y = \ln(x)$.
- *Pour tout réel* $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- *Pour tout réel* x, $\ln(e^x) = x$.

La fonction logarithme est la fonction réciproque de l'exponentielle.

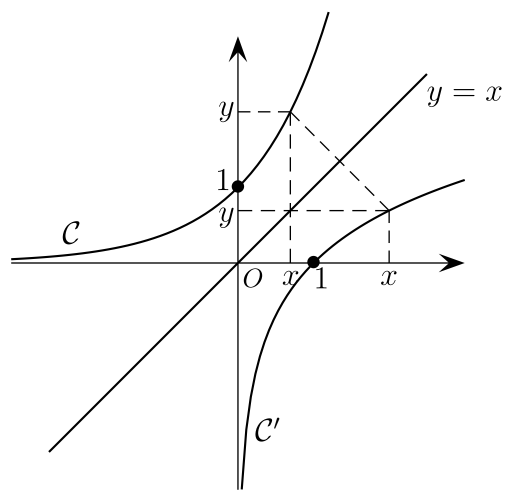
Corollaire
- $\ln(1)$ *est le nombre dont l'exponentielle vaut* 1, *donc* $\underline{\ln(1) = 0}$.
- $\ln(e)$ *est le nombre dont l'exponentielle vaut* e, *donc* $\underline{\ln(e) = 1}$.
- *Pour tout réel* λ, *l'équation* $\ln(x) = \lambda$ *admet pour unique solution* $x = e^\lambda$.

Exercice 2

a) Résoudre les équations: $(E_1): e^x = 5$ $(E_2): \ln(x) = -5$ $(E_3): \ln(2x-1) = -2$ $(E_4): \ln(1+x) = 100$

b) Résoudre le systèmes : $\mathcal{S}_1 : \left\{\begin{array}{rcrcr} -\ln x & + & 2\ln y & = & 1 \\ 3\ln x & - & 5\ln y & = & -1 \end{array}\right.$; $\mathcal{S}_2 : \left\{\begin{array}{rcrcr} -2\ln x & + & 3\ln y & = & -1 \\ -7\ln x & - & 8\ln y & = & 1 \end{array}\right.$

Propriété *Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite d'équation* $y = x$ *(première bissectrice).*



Démonstration: Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logartihme.
Si $M(x;y)$ appartient à $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $y = e^x$, alors, on a aussi $x = \ln(y)$, c'est-à-dire que le point $M'(y;x)$ appartient à $\mathcal{C}'$. □

II - Propriétés algébriques de la fonction ln

Théorème *(Relation fondamentale du logarithme)*
Pour tous réel a *et* b *de* $\mathbb{R}_+^*$ $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration: Soit $a > 0$ et $b > 0$, alors $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)}e^{\ln(b)} = ab$ et $e^{\ln(ab)} = ab$.
On en déduit que $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(ab)}$, et donc, la fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, que $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$. □

Propriété *Pour tous réels $a>0$ et $b>0$, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$, et, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.*

Démonstration: Pour $a>0$, $\ln\left(a\dfrac{1}{a}\right)=\ln(a)+\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln(1)=0$, d'où, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$.

Pour $a>0$ et $b>0$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln\left(a\dfrac{1}{b}\right)=\ln(a)+\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$. □

Corollaire
- *Pour tous réels strictement positifs a_1, a_2, ..., a_n,*

$$\ln(a_1a_2\dots a_n)=\ln(a_1)+\ln(a_2)+\dots\ln(a_n)$$

- *Pour tout réel $a>0$ et tout entier relatif n, $\ln(a^n)=n\ln(a)$*

Démonstration: La première propriété se déduit par récurrence de la relation fondamentale du logarithme :

Pour $n=2$: C'est la relation fondamentale du logarithme : pour tous réels $a_1>0$ et $a_2>0$, $\ln(a_1a_2)=\ln(a_1)+\ln(a_2)$, et donc la relation est vraie pour $n=2$.

Hérédité : supposons que pour tous réels strictement positifs, a_1, a_2, ..., a_n, on ait $\ln(a_1a_2\dots a_n)=\ln(a_1)+\ln(a_2)+\dots+\ln(a_n)$.

Soit alors $n+1$ réels strictement positifs,

$$\begin{aligned}\ln(a_1a_2\dots a_na_{n+1}) &= \ln\Big((a_1a_2a_n)a_{n+1}\Big)\\ &= \underbrace{\ln(a_1a_2a_n)}+\ln(a_{n+1}) \text{ , d'après la relation fondamentale}\\ &= \Big(\ln(a_1)+\ln(a_2)+\dots+\ln(a_n)\Big)+\ln(a_{n+1}) \text{ , d'après l'hypothèse de récurrence}\end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.

Soit $a>0$ et n un entier naturel, alors $\ln(a^n)=\ln(\underbrace{a\,a\,a\dots a}_{n\text{fois}})=\underbrace{\ln(a)+\ln(a)+\dots\ln(a)}_{n\text{fois}}=n\ln(a)$

Si n est un entier relatif négatif, $\ln(a^n)=\ln\left(\dfrac{1}{a^{-n}}\right)=-\ln(a^{-n})=-\Big(-n\ln(a)\Big)=n\ln(a)$ □

Propriété *Pour tout réel $a>0$, $\ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\ln(a)$.*

Démonstration: Pour $a>0$, $\ln\left[\sqrt{a}^2\right]=2\ln(\sqrt{a})=\ln(a)$, d'où la propriété. □

Remarque : On a donc, pour tout réel $a>0$, $\ln(\sqrt{a})=\ln(a^{\frac{1}{2}})$, d'où la notation $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 3 Soit f et g les fonctions définies par les expressions

$$f(x)=\ln(x+3)+\ln(x-2) \quad \text{et,} \quad g(x)=\ln(x^2+x-6)$$

Déterminer l'ensemble de définition de f et de g. Que peut-on dire de ces deux fonctions ?

Exercice 4 Soit f la fonction définie par l'expression $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f, et montrer que sa courbe représentative admet l'orignie du repère comme centre de symétrie.

Rappel : une telle fonction est dite "impaire" et vérifie, pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, $f(-x)=-f(x)$.

III - Etude de la fonction ln

Propriété *La fonction* ln *est continue et dérivable sur* $]0;+\infty[$*, et pour tout* $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Démonstration: On admet que la fonction ln est dérivable (et donc aussi continue) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=e^{\ln(x)}$. Alors, par définition du logarithme, pour tout $x>0$, $f(x)=x$, et en particulier, $f'(x)=1$.

Par ailleurs, en dérivant la fonction composée f, on obtient : $f'(x)=\ln'(x)e^{\ln(x)}=\ln'(x)\,x$.

On en déduit que $\ln'(x)\,x=1$, soit, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. □

Corollaire
- $0<a<b \iff \ln a<\ln b$, *car* ln *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- *Comme* $\ln(1)=0$, *on a donc,* $\ln x<0 \iff 0<x<1$ *et* $\ln x>0 \iff x>1$
- *Pour tout fonction* u *dérivable sur un intervalle* I *telle que* $u>0$ *on a :* $\Big(\ln(u)\Big)'=\dfrac{u'}{u}$

Exercice 5 Déterminer l'ensemble de définition puis le signe de la fonction sur cet ensemble :

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{e}\right)$ b) $g(x)=(\ln x-1)\,(3-\ln x)$ c) $h(x)=\dfrac{\ln(2x-1)}{1-\ln x}$ d) $l(x)=\ln\left(x^2-7x+12\right)$

Exercice 6 Résoudre les équations et inéquations :
- $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$
- $\ln(x^2-3)\leq\ln(x)+\ln(2)$
- $2(\ln(x))^2+5\ln(x)-3=0$
- $2(\ln(x))^2+5\ln(x)-3>0$

Exercice 7 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f:x\mapsto 2\ln(x)$ b) $g:x\mapsto\ln(2x)$ c) $h:x\mapsto\ln(x^2-7x+12)$

Propriété
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to0}\ln(x)=-\infty$

Démonstration: En $+\infty$. Comme pour $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}>0$, la fonction ln est croissante.

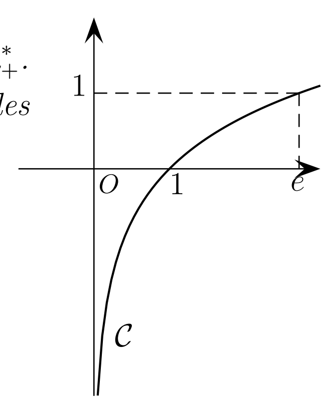
Pour A un nombre réel quelconque, aussi grand que l'on veut, il suffit donc de choisir $x>e^A$ pour avoir $\ln(x)>A$.
Ceci signifie exactement que, pour tout nombre réel A, tous les nombres $\ln(x)$ sont dans $]A;+\infty[$ dès que $x>e^A$, c'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

En 0. Pour $x>0$, on pose $X=\dfrac{1}{x}$. Alors, $\ln(x)=\ln\left(\dfrac{1}{X}\right)=-\ln(X)$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln(x)=\lim_{X\to+\infty}\Big(-\ln(X)\Big)=-\infty$. □

Corollaire *La fonction* ln *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$. *La courbe représentative de la fonction* ln *admet l'axe des ordonnées comme asymptote en* 0^+.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\ln'(x)$	‖ $+$
ln	‖ $-\infty$ ↗ $+\infty$



Propriété $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$, *et plus généralement, pour tout entier n,* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$.

Démonstration: Pour $x>0$, on pose, $X=\ln(x)\iff x=e^X$, alors, $\dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{X}{e^X}$, et donc, comme par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{e^x}{X}=+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{\frac{X}{e^X}}=0$.

De même, pour tout entier $n\geq 2$, $\dfrac{\ln(x)}{x^n}=\dfrac{1}{x^{n-1}}\times\dfrac{\ln(x)}{x}$, d'où la limite en $x\to+\infty$. $\square$

Corollaire $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\ln(x)=0$

Démonstration: A démontrer, en posant $X=\dfrac{1}{x}$. $\square$

Propriété $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Démonstration: $\tau(h)=\dfrac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=\dfrac{\ln(1+h)}{h}$ est le taux de variation de la fonction ln en 1.

On a donc, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\tau(h)=\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$. $\square$

Exercice 8 Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\ln(x)-x$ b) $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ c) $h(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2+5x+7}$ d) $k(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$

Exercice 9 Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ b) $g(x)=\dfrac{\ln(x)-3x}{3x^3}$ c) $h(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ d) $k(x)=(2x^3+3x^2-5)e^{-x}$

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+9x+9+\ln(x)}{x+3}$.

Montrer que la droite d'équation $y=2x+3$ est asymptote oblique en $+\infty$ à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 11 Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction ln aux points d'abscisse 1 et e.

Tracer dans un repère la courbe $\mathcal{C}$ et ses deux tangentes.

Exercice 12 Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction

$$f:x\mapsto\frac{\ln(x)+2}{\ln(x)-1}\ .$$

Exercice 13 Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln(x)$.

Exercice 14 Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\Big(\ln(x)\Big)^2$.

Exercice 15 Etudier la fonction f définie par l'expression $f(x)=\ln\left(\ln(x)\right)$.

Exercice 16 Etudier la fonction définie sur $\Big]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\Big[$ par $f(x)=-\ln\Big(\cos(x)\Big)$.

Exercice 17 Soit f la fonction définie sur $]\,0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\Big(O;\vec{i},\vec{j}\Big)$.

1. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - \ln(2)$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   b) Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et justifier que $\alpha \in \left[1; \frac{5}{4}\right[$.
5. Tracer Δ et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 18 Soit u la suite définie pour tout entier $n > 0$ par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

I. *Calcul des premiers termes de la suite*
   a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

   b) Calculer les premiers termes u_1, u_2 et u_3 de cette suite.

II. *Etude de la convergence de la suite u*
   1) a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif, $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$
      b) En déduire que pour tout entier naturel non nul p, $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$
   2) Soit n un entier naturel non nul.
      a) Ecrire l'encadrement précédent pour les valeurs n, $n+1$, ..., $2n-1$ de p.
      b) En effectuant les sommes membre à membre des inégalités obtenues, démontrer que

$$u_n \leq \ln(2) \leq u_n + \frac{1}{2n}$$

   3) Prouver alors que la suite u converge vers $\ln(2)$.

Exercice 19 On considère la fonction f définie sur $]\,0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x}\ln(x)$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. a) Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $]\,0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln(x)$.
   b) Vérifier que $g(1) = 0$. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

2. a) Montrer que pour tout réel x de $]\,0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
   b) En déduire les variations de f.
   c) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   d) Dresser le tableau de variation de f.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

IV - Logarithme décimal

<u>**Définition**</u> *La fonction logarithme décimal est la fonction, notée* log, *définie sur* $]\,0; +\infty[$ *par*

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}\ .$$

Propriété
- $\log(1)=0$, $\log(10)=\dfrac{\ln(10)}{\ln(10)}=1$
- *Pour tous réels $a>0$ et $b>0$, $\log(ab)=\log(a)+\log(b)$.*
- *Pour tout réel $a>0$, $\log(a^n)=n\log(a)$.*
  En particulier, lorsque $a=10$, $\log(10^n)=n\log(10)=n$.
  $n=\log a$ équivaut à $a=10^n$: le logarithme décimal "compte les puissances de 10".
  Le logarithme décimale est la fonction réciproque de la fonction $x\mapsto 10^x$:
  $\log(10^x)=x$ **et,** $10^{\log(x)}=x$

Remarque : Le logarithme népérien est parfois notée (dans la littérature anglo-saxone notamment) $\log$ au lieu de $\ln$, tandis que le logarithme décimal est noté $\log_{10}$, ou encore Log.

Exercice 20 Soit le nombre $a=2^{13\,345}$. Vérifier que $4\,017\leqslant\log(a)<4\,018$.
Indiquer alors le nombre de chiffre de la partie entière de l'écriture décimale de a.

Exercice 21 *(Echelle de Richter)*
La magnitude d'un séisme, sur l'échelle de Richter, est évaluée à partir de l'amplitude A des ondes sismiques enregistrées sur un sismographe par la formule $M=\log(A)-\log(A_0)$, où A_0 désigne l'amplitude d'un séisme de référence.

1. On a mesuré l'amplitude d'un séisme et on a obtenu $A=3,98\,10^7\,A_0$.
   Calculer la magnitude de ce séisme sur l'échelle de Richter.
2. La magnitude d'un séisme est 5.
   Déterminer le rapport $\dfrac{A}{A_0}$ de son amplitude à l'amplitude de référence.
3. A quelle variation d'amplitude correspond une variation de magnitude de 1 sur l'échelle de Richter.

Exercice 22 *(pH d'une solution)*
La molarité en ions H^+ d'une solution est le nombre, noté $[H^+]$ de moles par litre d'ions H^+.
$[H^+]$ s'exprime généralement par un nombre comportant une puissance négative de 10 (10^{-5} mol.L^{-1} par exemple). On lui préfère donc le pH défini par pH$=-\log([H^+])$.

1. Quel est le pH d'un solution contenant 3.10^{-7} moles d'ions H^+ par litre ?
2. Quelle est la molarité en ions H^+ d'une solution neutre (pH$=7$) ?

V - Racine n-ième

Exercice 23 Soit $n\in\mathbb{N}^*$, et un réel $a\geqslant 0$.
Montrer que l'équation $x^n=a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.

Définition *Soit un réel $a\geqslant 0$.*
L'unique réel positif x tel que $x^n=a$ est appelé racine n-ième de a, et est notée $\sqrt[n]{a}$.

Ex : • $\sqrt[3]{8}=2$, car $2^3=8$ • $\sqrt[4]{81}=3$, car $3^4=81$ • $\sqrt[4]{25}=\sqrt{5}$ • $\sqrt[n]{0}=0$ • $\sqrt[n]{1}=1$

Propriété *Pour tout $a>0$, $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.*

Démonstration: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$, d'où $a^{\frac{1}{n}}$ est l'unique solution de l'équation $x^n=a$, et donc $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$
□

Exercice 24 Déterminer la dérivée des fonctions suivantes : a) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt[4]{X}}$ b) $g(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$