

I - Introduction - Résolution d'équations algébriques

Soit le trinôme du second degré $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5$.

Le discriminant de P est : $\Delta = 9 - 10 = -1 < 0$, donc P n'a pas de racine réelle.

Imaginons un instant que l'on puisse néanmoins écrire $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-1}$, et donc les formules donnant les racines de P (qui ne sont donc sûrement pas réelles!) :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -3 + \sqrt{-1}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -3 - \sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } P(x_1) = P(-3 + \sqrt{-1}) &= \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{-1})^2 + 3(-3 + \sqrt{-1}) + 5 \\ &= \frac{1}{2}(9 - 6\sqrt{-1} + (\sqrt{-1})^2) - 9 + 3\sqrt{-1} + 5 \\ &= \frac{1}{2}(9 - 6\sqrt{-1} + (-1)) - 4 + 3\sqrt{-1} \quad (\text{car } \sqrt{-1}^2 = -1!) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On vérifie de même que $P(x_2) = 0$, et ainsi, ce trinôme du second degré admet bien deux racines distinctes, mais celles-ci ne sont pas réelles.

Le nombre $\sqrt{-1}$ n'existe pas : ce n'est pas un nombre réel. Cardan, mathématicien du XVI^{ème} siècle appelait ce type de nombres des nombres "impossible". Plus tard, Descartes leur donna le nom de nombre "imaginaire", qui sont devenus aujourd'hui des nombres complexes.

II - Le plan complexe

Théorème (*admis*)

Il existe un ensemble noté \mathbb{C} , appelé ensemble des nombres complexes, qui possède les propriétés suivantes :

- \mathbb{C} contient l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- il existe un nombre complexe, noté i tel que $i^2 = -1$.
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels.

Ex : $z = 3 + 2i \in \mathbb{C}$; $z_2 = -5 \in \mathbb{R}$, donc $z_2 \in \mathbb{C}$; $z_3 = \sqrt{7} - 6i \in \mathbb{C}$; ...

Définition L'écriture $z = x + iy$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe z .

x est la partie réelle de z , notée $\Re(z)$, et y est la partie imaginaire de z , notée $\Im(z)$,

D'après le premier théorème et l'unicité de l'écriture sous forme algébrique, on a donc :

Corollaire Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a' et b' quatre nombres réels, alors,

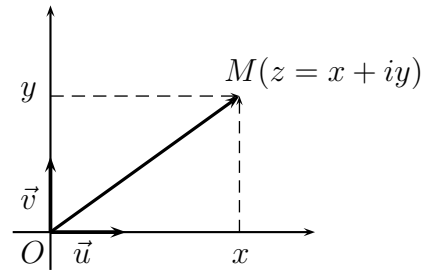
$$z = z' \iff (a = a' \text{ et } b = b')$$

Définition *Plan complexe*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct.

A tout nombre complexe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, on associe le point M de coordonnées $M(x; y)$.

On dit que z est l'affixe du point M , ou du vecteur \vec{OM} ; et que le point M , ou le vecteur \vec{OM} est l'image de z .



Définition Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, que l'on appelle donc **axe réel**.

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle, $z = 0 + iy = iy$ est appelé un **nombre imaginaire pur**. Les images de ces nombres sont les points de l'axe des ordonnées, que l'on appelle donc **axe imaginaire (pur)**.

Exercice 1 Placer les points A , B et C d'affixe respectif : $z_A = -1 - 2i$, $z_B = 4 - i$ et $z_C = \sqrt{2} + \frac{3}{2}i$. Déterminer les longueurs OA , OB et OC et AB .

III - Opérations sur les nombres complexes

Les règles de calcul sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes.

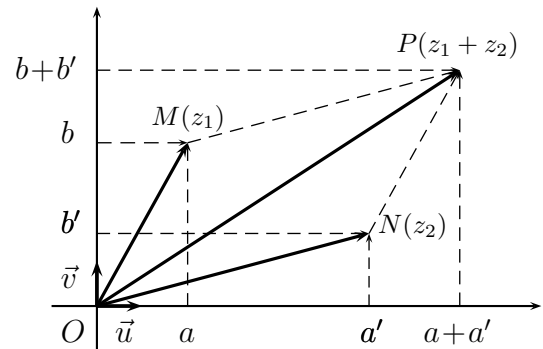
Exercice 2 Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

- $(2 + 3i) + (-1 + 6i)$
- $(5 + i) - (3 - 2i)$
- $(1 + i)(3 - 2i)$
- $(4 + i)(-5 + 3i)$
- $(2 - i)^2$
- $(x + iy)(x' + iy')$
- $(x + iy)^2$
- $(2 - 3i)(2 + 3i)$
- $(a + ib)(a - ib)$

Propriété Soit $z_1 = a + ib$ et $z_2 = a' + ib'$ deux nombres complexes, avec a , b , a' et b' quatre réels, et M et N leur image respective dans le plan complexe.

Alors $z = z_1 + z_2 = (a + a') + i(b + b')$ a pour image le point P tel que $\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{ON}$.

De même, le vecteur $\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}$ a pour affixe le complexe $z_{\vec{MN}} = z_2 - z_1$.



Propriété Soit deux points A et B d'affixe z_A et z_B , alors l'affixe du vecteur \vec{AB} est $z_B - z_A$.
Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'affixe z et z' , alors le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.
De plus, si $k \in \mathbb{R}$, le vecteur $k\vec{u}$ a pour affixe kz .

Exercice 3 Les points A , B et C ont pour affixe respective $-2 + i$, $3 + 3i$, $1 + \frac{11}{5}i$.

- a) Calculer les affixes des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .
- b) En déduire que les points A , B et C sont alignés.
- c) Placer les points A , B et C .

Exercice 4 Les points A , B et C ont pour affixe respective $1 + \frac{1}{2}i$, $\frac{3}{2} + 2i$ et $-1 - \frac{11}{2}i$.

Montrer que les points A , B et C sont alignés.

Exercice 5 On considère dans le plan complexe les points A , B , C et D d'affixe $z_A = 3+i$, $z_B = 2-2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1+5i$.

a) Faire une figure

b) Montrer de deux façons différentes que $ABCD$ est un parallélogramme.

Propriété (*Inverse d'un nombre complexe*)

Tout nombre complexe non nul z admet un inverse, noté $\frac{1}{z}$.

Démonstration : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul, c'est-à-dire $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Alors, $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$ avec $x^2 + y^2 \neq 0$

Exercice 6 Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $\frac{1}{\sqrt{3} + 2i}$
- $\frac{1 + 4i}{1 - \sqrt{2}i}$
- $(2 + i\sqrt{3})(5 - i) + \left(\frac{1}{2} + 3i\right)^2$
- i^3
- $\frac{1}{i}$
- i^4
- i^5
- i^6
- Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{Z}$, $z_n = i^n$

Exercice 7 Soit $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = 1 - i$. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $z_1^2 - 2z_2$
- $z_1 z_2^2$
- $\frac{z_1}{z_2}$
- $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$
- $\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2}$

Exercice 8

1. Donner la forme algébrique de : i^{12} ; i^{2012} ; i^{37} ; i^{-13}
2. Calculer la somme : $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2014}$
3. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1 + j + j^2$.

IV - Conjugué d'un nombre complexe

Définition Soit $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z , noté \bar{z} , le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.

Propriété Dans le plan complexe, si le point M a pour affixe z , alors l'image M' de \bar{z} est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Ex : • $z = 3 + 2i$, alors $\bar{z} = 3 - 2i$. • $3 - \frac{1}{2}i = 3 + \frac{1}{2}i$ • $\overline{-5} = -5$ • $\overline{3i} = -3i$

Propriété • $\bar{\bar{z}} = z$ • $z\bar{z} = x^2 + y^2$ • $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ • $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ • $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

• si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ • si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

• $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ et donc, z imaginaire pur $\iff \text{Re}(z) = 0 \iff z = -\bar{z}$

• $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$, et donc, $z \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(z) = 0 \iff z = \bar{z}$

Exercice 9 Soit les nombres complexes : $z_1 = \frac{3-i}{5+7i}$ et $z_2 = \frac{3+i}{5-7i}$.

Vérifier que $z_1 = \overline{z_2}$, et en déduire que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.
Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

Exercice 10 Soit P le polynôme défini sur \mathbb{C} par : $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

- Montrer que pour tout complexe z , $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
- Vérifier que $1 + i$ est une racine de P , et en déduire une autre racine complexe de P .

Exercice 11 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Z = z^2 + \overline{z}$ soit réel.

Exercice 12 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

- $5\overline{z} = 4 - i$
- $(1 + i)\overline{z} + 1 - i = 0$
- $3\overline{z} - 2iz = 5 - 3i$

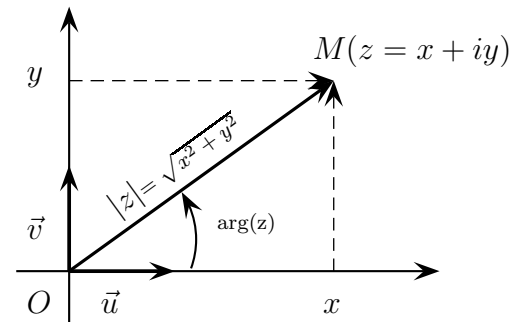
Exercice 13 Montrer que l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$ admet quatre solutions dans \mathbb{C} .

V - Module et argument d'un nombre complexe

Définition Soit dans le plan complexe un point M d'affixe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Alors, $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$. Ce nombre, **réel et positif**, s'appelle le **module** du nombre complexe z , et est noté $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On appelle **argument** du nombre complexe non nul z , noté $\arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté : $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

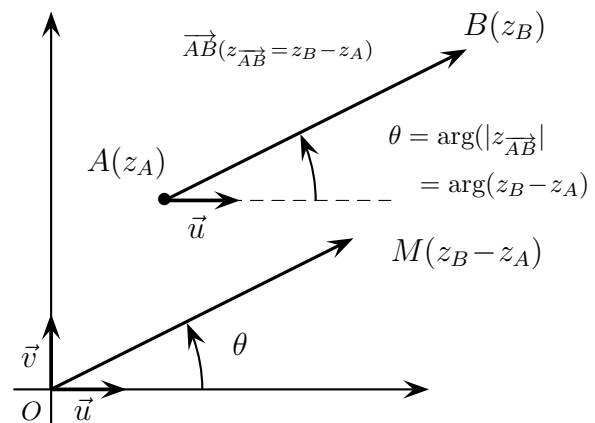


Remarque : Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments : si θ est un de ces arguments, alors tous les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On note $\arg(z) = \theta$ (modulo 2π), ou $\arg(z) = \theta [2\pi]$, ou encore, pour simplifier (mais alors par abus de langage), $\arg(z) = \theta$.

Propriété Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ et donc,

- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$
- $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A)$.



Exercice 14 Dans le plan complexe, A , B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 4 + 5i, \quad z_C = 5 - 2i.$$

- Montrer que $AB = AC$, puis que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$.
- Déterminer l'affixe du point K tel que le quadrilatère $ABKC$ soit un rectangle.
- Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.
 - Vérifier que B est le milieu du segment $[GK]$.

Propriété Pour tout nombres complexes z et z' :

- si $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
- $|-z| = |z|$ • $|\bar{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z||z'|$ • $|z^n| = |z|^n$ • $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Exercice 15 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

- $|z - 6i| = 3$ • $|z + 3 - 2i| < 2$ • $|z + 2| = |z - 3i + 1|$ • $|2 - iz| = |z + 5|$ • $\left|\frac{z + 2i}{z + 1 - 2i}\right| > 1$

VI - Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition Dans le plan complexe un point M peut-être repéré par ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$, ou son affixe complexe $z = x + iy$, ou par ses coordonnées polaires $(r; \theta)$, avec $r = OM$ et $\theta = (\vec{u}; \vec{OM})$.

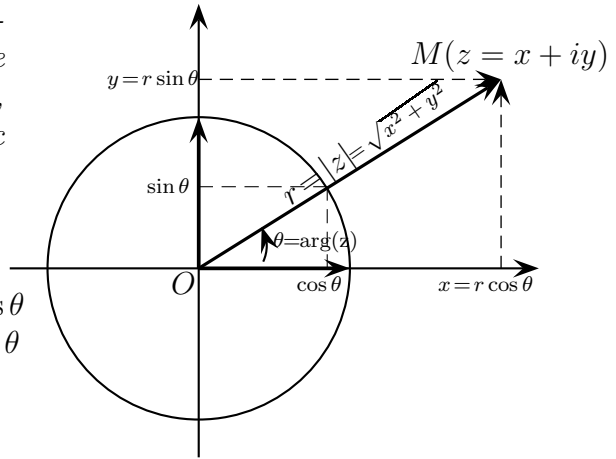
On a les relations :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{r}, \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \iff \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

L'affixe z du point M s'écrit alors,

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Cette écriture est la **forme trigonométrique** de z .



Exercice 16 Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = 3$ • $z_2 = -4$ • $z_3 = 2i$ • $z_4 = -1 + i$ • $z_5 = -\sqrt{3} + i$
- $z_6 = -17$ • $z_7 = -6\sqrt{3} + 6i$ • $z_8 = 5i$ • $z_9 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

VII - Exponentielle complexe

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$. Comme les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} , f l'est aussi, et,

$$f'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos \theta = i(i \sin \theta + \cos \theta) = if(\theta)$$

Comme de plus, $f(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$, on en déduit que f est définie de manière unique par l'expression $f(\theta) = e^{i\theta}$.

Propriété Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Ainsi, tout complexe z s'écrit sous la forme exponentielle complexe :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

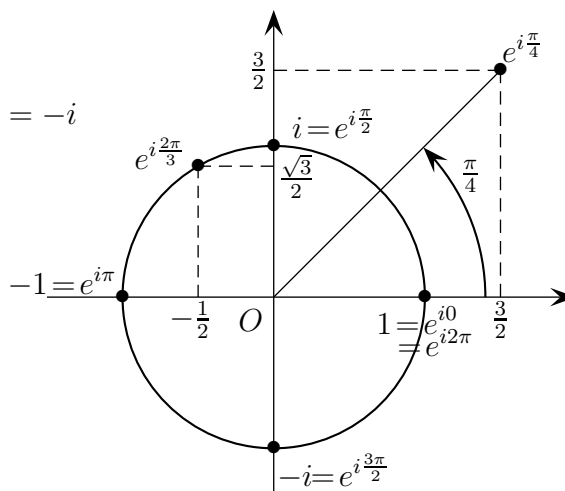
où, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Exemples :

$$\bullet e^{i0} = e^{i2\pi} = 1 \quad \bullet e^{i\pi} = -1 \quad \bullet e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad \bullet e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

$$\bullet e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\bullet \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$



Exercice 17 Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :

$$\bullet 3e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \bullet \sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}} \quad \bullet 6e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \bullet 5e^{i\frac{5\pi}{3}} \quad \bullet 2e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{3\pi}{2}} \quad \bullet \frac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$

Exercice 18 Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

$$\bullet 5 \quad \bullet 4 + 4i \quad \bullet \frac{3}{2}i \quad \bullet \frac{2}{1-i} \quad \bullet \sqrt{3} - i \quad \bullet (\sqrt{3} - i)^2 \quad \bullet (\sqrt{3} - i)^3$$

Propriété Pour tous réels θ et θ' , et tout entier naturel n ,

- $|e^{i\theta}| = 1$, et $\arg(e^{i\theta}) = \theta$
- $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (Formule de Moivre), c'est-à-dire, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta' [2\pi]$

Corollaire Pour tous nombres complexes z et z' ,

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \arg(z)$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration : Soit $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, et $z' = r'e^{i\theta'}$, $r' = |z'|$ et $\theta' = \arg(z')$, alors, $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$, et donc, $|zz'| = rr' = |z||z'|$, et $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$.

De même pour la puissance : $z^n = (re^{i\theta})^n = r^n (e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$, et donc, $|z^n| = r^n = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\theta = n \arg(z)$

Exercice 19 On donne $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Donner sous la forme exponentielle puis algébrique les complexes : $z_1 z_2 z_3$, $\frac{z_1}{z_2 z_3}$, z_2^2 , z_3^6 .

Exercice 20 Simplifier l'expression, où $\theta \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$.

Etait-ce prévisible sans calcul ?

Exercice 21 Ecrire le nombre complexe $(\sqrt{3} - i)^{10}$ sous forme algébrique.

Exercice 22 Calculer le module et un argument des complexes suivants, puis les écrire sous formes trigonométrique et exponentielle :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1+i)} \qquad z_2 = \frac{5(-1+i)}{\sqrt{3}+i}$$

Exercice 23

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 - i$, et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z , et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 24

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, et $Z = z_1 z_2$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z . En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 25 (*Formules trigonométriques*) Soit θ et θ' deux réels quelconques.

En exprimant de deux manières différentes le complexe $e^{i\theta}e^{i\theta'}$, exprimer $\cos(\theta + \theta')$ et $\sin(\theta + \theta')$ en fonction des cosinus et sinus de θ et θ' .

Exprimer de la même façon $\sin(2\theta)$ et $\cos(2\theta)$.

Exercice 26 En utilisant la notation exponentielle complexe, retrouver en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les valeurs de :

$$\begin{aligned} &\bullet \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) && \bullet \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) && \bullet \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) && \bullet \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &\bullet \cos(x + \pi) && \bullet \sin(x + \pi) && \bullet \cos(\pi - x) && \bullet \sin(\pi - x) \end{aligned}$$

Corollaire Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ alors $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Démonstration:
$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) \\ &= -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_D - z_C) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \end{aligned}$$

□

Exercice 27 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$\begin{aligned} &\bullet \arg(z) = \frac{\pi}{6} && \bullet |z - 3| = |z + 2i| && \bullet |z + 1 - 2i| < \sqrt{5} && \bullet \left|\bar{z} + \frac{i}{2}\right| = 4 \\ &\bullet \arg(z + i) = \pi && \bullet \arg\left(\frac{1}{iz}\right) = \pi && \bullet \arg\left(\frac{z+1}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

VIII - Équations du second degré

Propriété Soit a un nombre réel. Les solutions de l'équation $z^2 = a$ sont appelées racines carrées de a dans \mathbb{C} , avec

- si $a \geq 0$, alors $z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$ (deux racines réelles)
- si $a < 0$, alors $z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$ (deux racines complexes, imaginaires pures)

Démonstration : • Si $a \geq 0$, alors $z^2 = a \iff (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) = 0$, d'où les racines de l'équation.

• Si $a < 0$, $z^2 = a \iff z^2 - i^2(-a) = z^2 - i^2(\sqrt{-a})^2 = 0 \iff (z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a}) = 0$, d'où les racines complexes.

Ex : Les racines carrées de 2 dans \mathbb{C} sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{-2}$, qui sont réelles; les racines carrées de -4 dans \mathbb{C} sont $i\sqrt{4} = 2i$ et $-i\sqrt{4} = -2i$.

Propriété L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a \neq 0$, b et c sont trois réels, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ admet :

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double $z = -\frac{b}{2a}$
- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles distinctes $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas, le trinôme du second degré se factorise selon (avec éventuellement $z_1 = z_2$) : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exercice 28 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

• $z^2 + z + 1 = 0$ • $z^2 - 3z + 18 = 0$ • $z^2 + 9z - 4 = 0$ • $-z^2 + (1 + \sqrt{3})z - \sqrt{3} = 0$

Exercice 29 On considère l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$, où θ est un réel donné dans $[0; 2\pi[$.

- a) Vérifier que le discriminant de cette équation est $\Delta = -4\sin^2(\theta)$.
- b) Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation proposée, en discutant suivant les valeurs de θ , en donnant les solutions sous formes exponentielle.

Exercice 30 Ecrire sous forme exponentielle les solutions de : $z^2 - 2z\sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$.

Exercice 31

- a) Donner sous forme exponentielle les solutions de l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.
- b) Soit α un réel donné. Factoriser l'expression : $z^2 - e^{2i\alpha}$.
- c) En déduire les solutions de l'équation : $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Exercice 32 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

Exercice 33 On considère l'équation du second degré (E) : $z^2 + (1 + i\sqrt{3})z - 1 = 0$.

1. Déterminer le discriminant Δ de cette équation. Écrire Δ sous forme exponentielle.
2. Donner un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Écrire δ sous forme algébrique.
3. Vérifier que les formules usuelles du second degré, $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et son conjugué $z_2 = \bar{z}_1$ donnent bien deux solutions de (E).

Exercice 34 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - \bar{z} + \frac{1}{4} = 0$.

Exercice 35 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 3\bar{z} + 2 = 0$.

Exercice 36 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

Exercice 37 On considère le polynôme P défini sur \mathbb{C} par $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$.

- a) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que, pour tout nombre complexe z ,
 $P(z) = (z^2 + 1)Q(z)$.
- b) En déduire toutes les racines dans \mathbb{C} du polynôme P .

Exercice 38 Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i$.

- Calculer $P(i)$.
- Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z) = (z - i)(z^2 + pz + q)$.
- Déterminer alors toutes les racines du polynôme P .

Exercice 39 Soit le polynôme P défini sur \mathbb{C} par : $P(z) = 3z^3 + (1 + 6i)z^2 + 2(8 + i)z + 32i$.

- a) Vérifier que $z_0 = -2i$ est une racine de P .
- b) En déduire une factorisation de P , et déterminer alors toutes les racines de P .

Exercice 40

- x est un nombre réel. Ecrire la forme algébrique et la forme exponentielle de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)e^{ix}$.
- Utiliser la question précédente pour résoudre dans $] - \pi; \pi[$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$.

Propriété (Equations d'un cercle) Soit \mathcal{C}_0 le cercle trigonométrique et \mathcal{C}_R le cercle de rayon R centré à l'origine, et $\mathcal{C}_{R,\Omega}$ le cercle de rayon R centré en Ω d'affixe ω , alors :

- $M(z) \in \mathcal{C} \iff OM = 1 \iff |z| = 1 \iff z = e^{i\theta}$
- $M(z) \in \mathcal{C}_R \iff OM = R \iff |z| = R \iff z = Re^{i\theta}$
- $M(z) \in \mathcal{C}_{R,\Omega} \iff \Omega M = R \iff |z - \omega| = R \iff z - \omega = Re^{i\theta} \iff z = \omega + Re^{i\theta}$

Remarque : En écrivant $z = x + iy$ et $\omega = \omega_x + i\omega_y$, on retrouve l'équation cartésienne d'un cercle

$$M(x; y) \in \mathcal{C}_{R,\Omega} \iff |z - \omega| = R \iff |(x - \omega_x) + i(y - \omega_y)|^2 = R^2 \iff \underline{(x - \omega_x)^2 + (y - \omega_y)^2 = R^2}$$

Exercice 41

- Déterminer l'équation du cercle de rayon 3 et de centre $\Omega(3 + 2i)$.
- Quel est l'ensemble des point $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.
- Quel est l'ensemble des point $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 11 = 0$.

Exercice 42 Soit p et q deux nombres réels.

- Factoriser $e^{i\frac{p+q}{2}}$ dans la somme $e^{ip} + e^{iq}$.
- En déduire une factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$ et de $\sin(p) + \sin(q)$.
- Résoudre dans l'intervalle $] - \pi; \pi[$ l'équation : $\cos(x) + \cos(3x) = 0$.