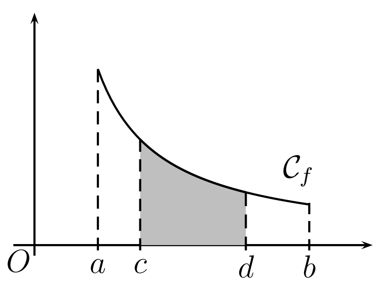
Probabilités - Lois continues

I - Loi à densité

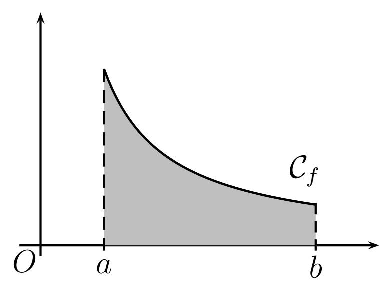
Définition *Une variable aléatoire* **continue** X *est une fonction qui à chaque issue de l'univers* Ω *associe un nombre réel d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$.

Exemple : Loi de viellissement. Pour une équipement produit en grande série, on peut définir la variable aléatoire X égale à la durée de vie (ou de bon fonctionnement) d'un appareil pris au hasard.
X est une variable aléatoire **continue**.

Définition *Soit* f *une fonction continue et positive sur un intervalle* $I = [a;b]$ *telle que :* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 1$.
Dire que la variable aléatoire continue X *suit* **la loi de probabilité** P **de densité** f *signifie que, pour tout intervalle* $J \subset I$, *la probabilité* $P(X \in J)$ *est égale à l'aire du domaine* $\Big\{M(x;y)\,;x \in J$ *et* $0 \leqslant y \leqslant f(x)\Big\}$.



$P(c \leqslant X \leqslant d)$



$P(a \leqslant X \leqslant b) = 1$

Propriété

- *Pour tout nombre réel* $c \in I$, $P(X = c) = 0$
- *D'après ce qui précède,*

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = P(c < X \leqslant d) = P(c \leqslant X < d) = P(c < X < d)$$

- *D'après la définition de l'intégrale d'une fonction continue, on a donc*

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(t)\,dt$$

Remarques :

1. Dans le cas où l'intervalle I n'est pas borné, par exemple $I = [a; +\infty[$, on adapte ce qui précède en utilisant
$$P(X \in I) = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$
2. Les propriétés des probabilités discrètes s'étendent au cas continu :
   - Probabilité du complémentaire : $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$
   - Probabilité conditionnelle : $P_{(X\in J)}(X \in J') = \dfrac{P(X \in J' \cap J)}{P(X \in J)}$

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $I = [0; 1]$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction f définie par $f(x) = 4x^3$.

1. Vérifier que la fonction f définie bien une loi de probabilité.
2. Calculer la probabilité $P(0,3 \leqslant X \leqslant 0,6)$.

Exercice 2 Y est une variable aléatoire à valeurs dans $[0;+\infty[$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction définie par $f(x)=2e^{-2x}$.

1. Vérifier que la fonction f définie bien une loi de probabilité.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(n \leqslant Y \leqslant n+1)$.
3. Soit $m \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité que Y soit inférieure à m.
4. Soit p et q deux entiers naturels, $p \leqslant q$, déterminer la probabilité $P_{(Y \leqslant q)}(Y \leqslant p)$.

Définition *L'espérance d'une variale aléatoire X de densité f sur $[a;b]$ est le nombre réel*

$$E(X)=\int_a^b t\,f(t)\,dt$$

Exercice 3 Soit Z la variable aléatoire à valeurs dans $[-10;10]$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction définie par $f(x)=\dfrac{3}{2000}x^2$.

1. Vérifier que la fonction f définie bien une loi de probabilité.
2. Calculer l'espérance de la variale aléatoire Z.
3. Déterminer le nombre réel a tel que $P(-a \leqslant Z \leqslant a)=0,95$.

II - Loi uniforme

La loi uniforme est la loi de probabilité qui généralise la loi équiprobable dans le cas discret.

Définition *La loi* **uniforme** *sur l'intervalle $[a;b]$, avec $a<b$, est la loi de probabilité dont la densité est une fonction constante sur $[a;b]$.*

Propriété *La densité de probabilité de la loi uniforme sur $[a;b]$ est la fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$.*

<u>Démonstration:</u> f est une fonction constante sur $[a;b]$, donc définie par $f(x)=\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pour que f définisse une loi de probabilité sur $[a;b]$, on doit avoir

$$\int_a^b f(t)\,dt=1 \iff \int_a^b \lambda\,dt=1 \iff \lambda(b-a)=1 \iff \lambda=\frac{1}{b-a}$$

□

Propriété *L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur $[a;b]$ est*

$$E(X)=\frac{a+b}{2}\ .$$

<u>Démonstration:</u> La densité de probabilité est définie par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, et alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b t\,f(t)\,dt=\int_a^b t\,\frac{1}{b-a}\,dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b t\,dt=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{b-a}(b-a)(b+a)=\frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

Exercice 4 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $I = [-2; 2]$.

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité de X.
2. Calculer $P\left(X < 1\right)$ et $P\left(X \geqslant 1,5\right)$.
3. Calculer $P_{(X>0)}\left(X < 1\right)$.
4. Donner l'espérance de X.

Exercice 5

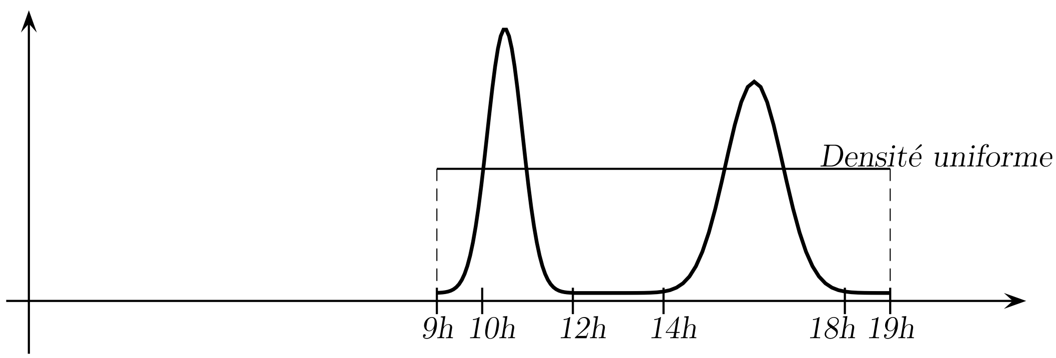
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $9x^2 - 33x + 10 > 0$.
2. On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[0; 2]$.
   a) Quelle est la probabilité que ce nombre soit solution de l'inéquation $9x^2 - 33x + 10 > 0$?
   b) Quelle est la probabilité que ce nombre soit solution de l'équation $9x^2 - 33x + 10 = 0$.

Exercice 6 Je n'ai pas de monnaie pour payer le parking où ma voiture est stationnée.

Les agents municipaux passent aléatoirement une fois par jour durant les heures de stationnement payant de 9h à 19h.

Je compte laisser ma voiture là pendant 2h. Quelle est la probabilité que je sois verbalisé ?

<u>Remarque :</u> *On pourrait utiliser d'autres "profils" (plus précisément "densités") de probabilités plus réalistes (prenant en compte une éventuelle pause repas...) :*



Exercice 7

1. X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.
   Déterminer $E(X)$, et interpréter cette valeur par une phrase.
2. Quel est le rôle de l'algorithme suivant ?

```
Initialisation
    S prend la valeur 0
    i prend la valeur 0
Traitement
    Tant que i < 1000
        x prend une valeur aléatoire dans [0; 1[
        S prend la valeur S + x
        i prend la valeur i + 1
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher S/1000
```

   Quel résultat, approximativement, s'affichera en sortie de cet algorithme ?

   Traduire cet algorithme dans un langage (calculatrice par exemple) et le faire fonctionner.

III - Lois exponentielles

Définition *Soit un réel $\lambda > 0$. La loi exponentielle de paramètre λ sur $[0;+\infty[$ est la loi de probabilité de densité définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.*

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10$.

1. Déterminer la probabilité $P(0 \leqslant X \leqslant 10)$.
2. Soit a et b deux réels, $a \leqslant b$, déterminer la probabilité $P(a \leqslant X \leqslant b)$.
3. Déterminer la probabilité $P(X \geqslant 10)$.
4. a) Déterminer deux réels α et β tels que la fonction G définie par $G(x) = (\alpha x + \beta)\, e^{-10x}$ soit une primitive de $g(x) = 10x\, e^{-10x}$.
   b) En déduire l'espérance de X.

Propriété *L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ est :*

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}\,.$$

Démonstration:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t\, f(t)\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t\, \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

Pour calculer l'intégrale, on cherche une primitive G de $g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ sous la forme $G(t) = (\alpha t + \beta)\, e^{-\lambda t}$.
G est dérivable sur $[0;+\infty[$, avec $G'(t) = \alpha e^{-\lambda t} - \lambda(\alpha t + \beta)\, e^{-\lambda t} = \Big(-\lambda\alpha t + (\alpha - \lambda\beta)\Big) e^{-\lambda t}$.

Ainsi, $\forall t \in [0;+\infty[$, $G'(t) = g(t) \iff \begin{cases} -\lambda\alpha = \lambda \\ \alpha - \lambda\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -\dfrac{1}{\lambda} \end{cases} \iff G(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$

On a alors, $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x g(t)\, dt = \lim_{x\to+\infty} \Big[G(t)\Big]_0^x = \lim_{x\to+\infty} (G(x) - G(0))$.

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -xe^{-\lambda x} = 0$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$, d'où, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$, et donc, $E(X) = -G(0) = \dfrac{1}{\lambda}$. □

Exemple : On admet que les phénomènes d'attente peuvent se modéliser par une loi exponentielle.
Un magasin annonce que le temps d'attente moyen en caisse est de 5 min.

1. Que vaut le paramètre de la loi exponentielle ?
2. Quelle est la probabilité, dans ce magasin, que j'attende à la caisse :
   a) moins de 5 min ?
   b) entre 5 et 10 min ?
   c) plus de 15 min ?

Exercice 9 *Loi de durée de vie sans vieillissement*

La durée de vie d'un produit est une variable aléatoire T à valeurs dans $[0;+\infty[$.
L'événement $(T \geqslant t)$ désigne l'événement : "L'élément est encore en vie à l'instant t".
On suppose que T suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ.

On dit que T suit une loi de durée de vie sans viellissement si la probabilité que l'élément soit encore en vie à l'instant $t + h$ sachant qu'il est en vie à l'instant t ne dépend que de la durée h (et donc pas de l'instant t).

Montrer que T suit une loi de durée de vie sans viellissement.

Remarque : Par exemple, lors de la désintégration radioactive, le durée de vie d'un noyau est une loi sans viellissement.

Exercice 10 La durée de vie de certaines ampoules peut-être modélisée par une loi exponentielle. Ces ampoules ont une durée de vie de 800 heures.

1. Déterminer le paramètre de cette loi et donner la densité de probabilité associée.
2. Calculer la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard ait une durée de vie supérieure à 1000 heures.
3. Sachant que l'ampoule à mon plafond fonctionne depuis déjà 1000 heures, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 100 heures ?
4. Une ampoule provenant du même stock brille depuis déjà 10 000 heures. Quelle est la probabilité qu'elle continue de briller pendant encore 100 heures de plus ?

Exercice 11 Le temps d'attente à une caisse a été estimé statistiquement dans un grand magasin.

En notant Y la variable aléatoire, à valeurs dans $[0;+\infty[$, égale au temps d'attente en minutes, d'un client à cette caisse, on modélise la loi de probabilité de Y par une loi exponentielle.

1. On a estimé que la probabilité qu'un client attende plus de 10 minutes à cette caisse est de $0,13$.
   Déterminer le paramètre de la loi exponentielle.
2. Déterminer la probabilité qu'un client attende moins de 10 minutes à cette caisse.
3. Déterminer le temps moyen d'attente à cette caisse.
4. J'attend déjà depuis 5 minutes à cette caisse. Quelle est la probabilité que je passe à la caisse dans plus de 5 minutes ?
   La caisse d'à côté m'a l'air bien plus rapide.
   Quelle est la probabilité pour que je passe à la caisse d'à côté dans plus de 5 minutes. Ai-je intérêt à changer de file d'attente ?
   (On suppose que les temps d'attente à toutes les caisses de ce magasin sont modélisés par la même loi).

Exercice 12 *D'après Bac*

Dans un magasin, des composants, en apparence tous identiques, peuvent présenter certains défauts. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans ce magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise.

On appelle X le nombre de composants défectueux achetés.
J'achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Arrondir au dix-millième.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Arrondir au dix-millième.
3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5.10^{-4}$.

On suppose aussi que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieur à 1000 heures (on donnera la valeur exacte et arrondie au centième) :
   a) si ce composant est défectueux ;
   b) si ce composant n'est pas défectueux.

2. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant non défectueux soit supérieure à 2000 heures sachant qu'il fonctionne encore parfaitement après 1500 heures d'utilisation.
3. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.

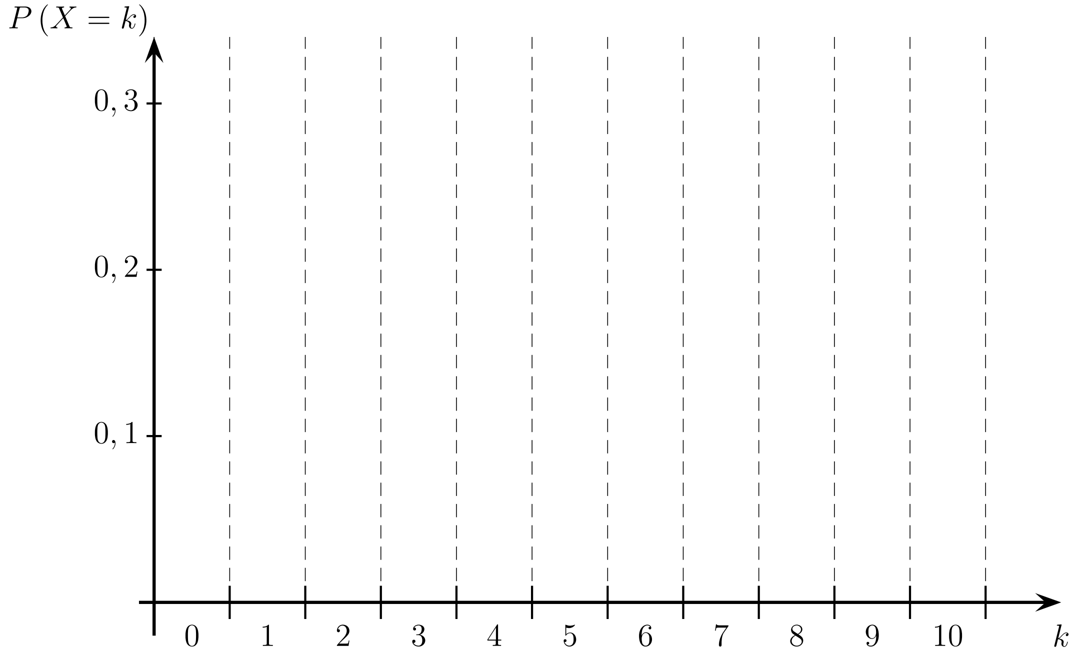
   Démontrer que la probabilité que ce composant soit en état de marche après t heures de fonctionnement est : $P(T > t) = 0,02e^{-5.10^{-4}t} + 0,98e^{-10^{-4}t}$.
4. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

Exercice 13 On lance 10 fois de suite un dé bien équilibré à six faces.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où les chiffres 2 ou 3 sont apparus.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Déterminer son espérance et son écart-type.
2. Compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X et l'histogramme suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=k)$											



IV - Lois normales

La loi normale (ou loi de Gauss, ou de Laplace, ou encore de Laplace-Gauss) est une loi théorique : c'est une idéalisation mathématique qui ne se rencontre jamais exactement dans la nature (pas plus qu'un cercle...). Néanmoins, de nombreuses distributions réellement observées s'en rapprochent de manière assez flagrante en présentant cette forme type en "cloche".

Un théorème très important en statistique et probabilité, le théorème central limite (largement hors programme en terminale S), montre la place prépondérante que cette loi occupe dans la modélisation de phénomènes naturels.

1) Loi normale centrée réduite

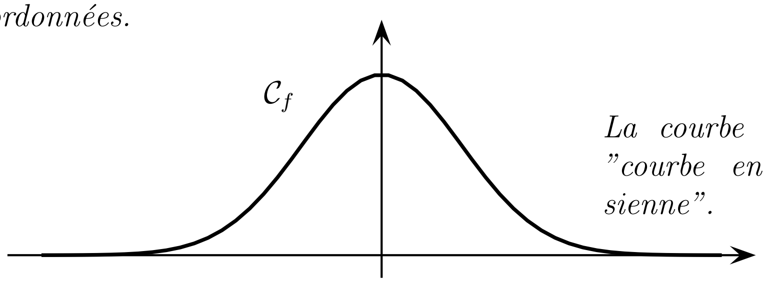
Définition *Une variable aléatoire X est dite*

- **centrée** *lorsque son espérance est nulle : $E(X) = 0$.*
- **réduite** *lorsque son écart type est 1 : $\sigma(X) = 1$.*

Définition *La loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0;1)$, est la loi de probabilité dont la densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \ .$$

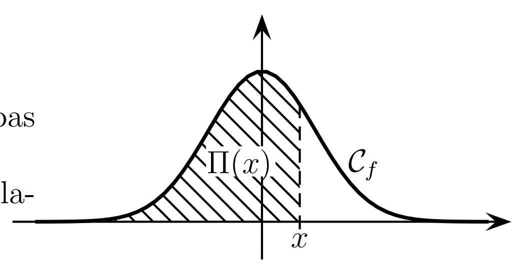
Propriété *f est continue et paire : sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*



La courbe représentative de f est dite "courbe en cloche", ou "courbe gaussienne".

Si X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, sa fonction de répartition est définie par

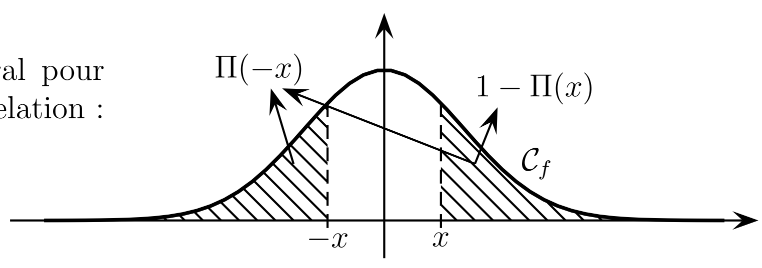
$$\Pi(x) = P\left(X \leqslant x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{x} f(t)\,dt$$



On ne connaît pas de primitive de f, et donc on ne sait pas calculer explicitiment l'intégrale de f.
Les valeurs des probabilités $\Pi(x)$ sont calculées par les calculatrices, tableurs, ... et sont tabulées.

Les valeurs de $\Pi(x)$ sont tabulées en général pour $x \geqslant 0$. Pour $x \leqslant 0$, on peut alors utiliser la relation :

$$\Pi(-x) = 1 - \Pi(x) \ .$$



Propriété *Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, on a donc,*

$$P\left(X \leqslant 0\right) = P\left(X \geqslant 0\right) = 0,5$$

Pour tous $a \leqslant b$, $\quad P\left(a \leqslant X \leqslant b\right) = \Pi(b) - \Pi(a)$.

Casio : Graph 35+ et modèles supérieurs

Menu `STAT`, puis `DIST`, et enfin `NORM`

• Calcul de $P(a \leqslant X \leqslant b) \to$ `Ncd` *(Normal, cumulative distribution)*

avec pour valeurs : `Lower` : a

`Upper` : b

σ : 1

μ : 0

puis `Calc (F1)` ...

• Calcul de $P(X \leqslant b)$:

on peut procéder de même, en entrant la borne inférieure `Lower` : -1E+99

TI82 Stats et modèles supérieurs

`2nd`$\to$`DISTR` (ou `distrib`)

• Calcul de $P(a \leqslant X \leqslant b) \to$ `normalcdf` (ou `normalFrep`)

puis : `normalcdf(a,b,0,1)`

• Calcul de $P(X \leqslant b) \to$ on procède de même en entrant la borne inférieure $a = -1$E+99 :

`normalcdf(a,b,0,1)`

Exercice 1 Soit X une v.a. suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

Calculer, à l'aide de la table des valeurs de Π et de la calculatrice, les probabilités :

a) $p_1 = P\left(X \leqslant 0,43\right)$ b) $p_2 = P\left(X \leqslant 1,38\right)$ c) $p_3 = P\left(0,43 \leqslant X \leqslant 1,38\right)$

d) $p_4 = P\left(X \leqslant -0,96\right)$ e) $p_5 = P\left(-1,1 \leqslant X \leqslant 2,57\right)$ f) $p_6 = P\left(-1,5 \leqslant X \leqslant 1,5\right)$

g) $p_7 = P\left(-1 \leqslant X \leqslant 1\right)$ h) $p_8 = P\left(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96\right)$ i) $p_9 = P\left(0 \leqslant X \leqslant 1,96\right)$

Casio : Graph 35+ et modèles supérieurs

Menu `STAT`, puis `DIST`, et enfin `NORM`

• Calcul de a tel que $P(X \leqslant a) = p \to$ `InvN` *(Inverse Normal)*

avec pour valeurs : `Tail` : Left

`Area` : p

σ : 1

μ : 0

puis `Calc (F1)` ...

TI82 Stats et modèles supérieurs

`2nd`$\to$`DISTR` (ou `distrib`)
- Calcul de a tel que $P(X\leqslant a)=p \to$ `InvNorm` (ou `FracNormale`)

puis : `invNorm(p,1,0)`

Exercice 2 Soit $\alpha=0,05$ et X une v.a. suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$.
Déterminer le nombre v_α tel que : $P\left(X\leqslant v_\alpha\right)=1-\alpha$.

Théorème
- *L'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ est : $E(X)=0$.*
- *Sa variance est : $V(X)=1$ et donc son écart-type est : $\sigma(X)=\sqrt{V}=1$ (admis).*

Démonstration: Pour tout x réel, on a $f'(x)=-x\,f(x)$, et donc,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}t\,f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0}t\,f(t)\,dt+\int_{0}^{+\infty}t\,f(t)\,dt$$

avec,

$$\int_{-\infty}^{0}t\,f(t)\,dt=\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{0}t\,f(t)\,dt=\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{0}-f'(t)\,dt=\lim_{x\to-\infty}\Big[-f(t)\Big]_x^0=\lim_{x\to-\infty}\Big(-f(0)+f(x)\Big)$$

or, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, et donc, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}t\,f(t)\,dt=-f(0)$.

De même, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}t\,f(t)\,dt=f(0)$, et donc, $\displaystyle E(X)=\int_{-\infty}^{0}t\,f(t)\,dt+\int_{0}^{+\infty}t\,f(t)\,dt=-f(0)+f(0)=0$.

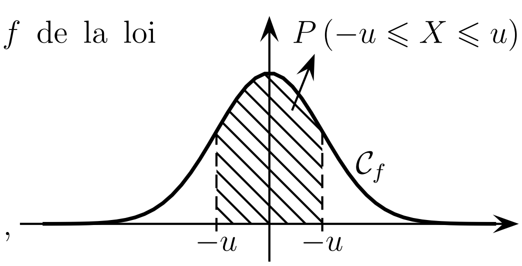
□

Propriété *Soit T une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, alors, pour tout nombre réel $0<\alpha<1$, il existe un unique nombre réel $u_\alpha>0$ tel que*

$$P\left(-u_\alpha\leqslant T\leqslant u_\alpha\right)=1-\alpha\ .$$

Démonstration: Par symétrie de la densité de probabilité f de la loi normale centrée réduite, on a

$$\begin{aligned}P\left(-u\leqslant X\leqslant u\right)&=2\,P\left(0\leqslant X\leqslant u\right)\\&=2\int_0^u f(x)\,dx=2F(u)\ ,\end{aligned}$$



où F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

F est continue (et même dérivable) et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ car $F'=f$ et $f>0$.

De plus, $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}F(u)=\frac{1}{2}$: il s'agit de la moitié de l'aire sous la courbe de f qui est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et dont l'aire totale (de $-\infty$ à $+\infty$) vaut 1.

On a donc le tableau de variation de la fonction $2F$:

x	0	$+\infty$
$2F$	0 $\nearrow$	1

Comme pour tout nombre $\alpha \in]0;1[$, le nombre $1-\alpha \in]0;1[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $u_\alpha \in]0;+\infty[$ tel que $2F(u_\alpha) = 1-\alpha$, c'est-à-dire tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

x	0	u_α	$+\infty$
$2F$	0	$1-\alpha$	1

$\square$

Exercice 3 Soit X une v.a. qui suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$.
Déterminer, à l'aide de la table de valeurs de Π et de la calculatrice, les valeurs de u et v telles que :

a) $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 0,95$ b) $P(-v \leqslant X \leqslant v) = 0,99$

Propriété *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, alors :*

- $u_{0,05} \simeq 1,96$: $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \simeq 1-5\% = 95\% = 0,95$
- $u_{0,01} \simeq 2,56$: $P(-2,56 \leqslant X \leqslant 2,56) \simeq 1-1\% = 99\% = 0,99$

Rappel : Soit X une variable aléatoire discrète qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, alors l'espérance de X est $\mu = E(X) = np$ et son écart type $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$.

La variable aléatoire $Y = X - \mu$ est alors centrée et $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ est centrée réduite.

Théorème Moivre-Laplace
Soit, pour tout entier n, X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Alors, $Y_n = \dfrac{X_n - \mu}{\sigma} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est une variable aléatoire centrée réduite et, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$P(a \leqslant Y_n \leqslant b) \text{ tend vers } \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\ .$$

En pratique, on approche les probabilités de la loi binomiale par celles de la loi normale lorsque $n \geqslant 30$ et $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

Exercice 4 On lance 3600 fois un dé équilibré. On souhaite évaluer la probabilité que le nombre d'apparition du 6 soit compris strictement entre 575 et 650.

On note X la v.a. égale au nombre d'apparitions du 6 lors de ces 3600 lancers.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier.
2. Appliquer, en justifiant son utilisation, le théorème de Moivre-Laplace à la v.a. X.
3. En déduire une valeur approchée de la probabilité recherchée.

2) Lois normales

Définition *Une variale aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ si et seulement si la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.*

Propriété *Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ alors*

$$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2 \qquad \sigma(X) = \sigma$$

- $\sim 68\%$ des valeurs sont dans $[m-\sigma\,;\,m+\sigma]$

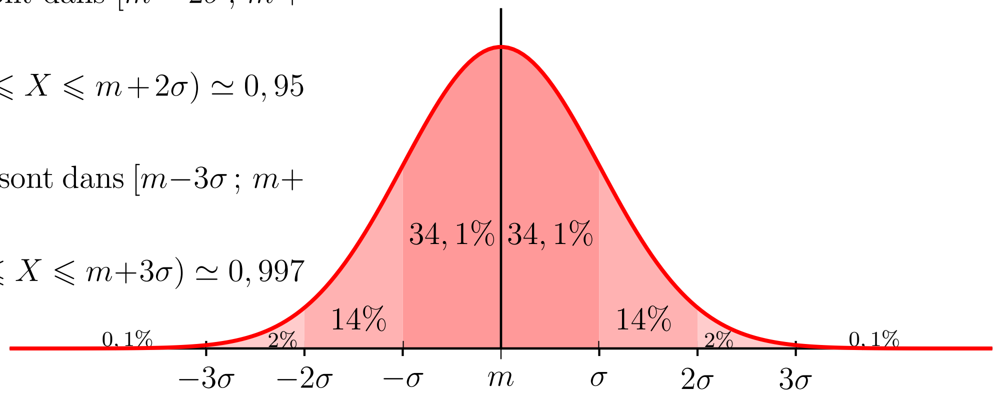
  soit aussi $P(m-\sigma \leqslant X \leqslant m+\sigma) \simeq 0,68$

- $\sim 95\%$ des valeurs sont dans $[m-2\sigma\,;\,m+2\sigma]$

  soit aussi $P(m-2\sigma \leqslant X \leqslant m+2\sigma) \simeq 0,95$

- $\sim 99,7\%$ des valeurs sont dans $[m-3\sigma\,;\,m+3\sigma]$

  soit aussi $P(m-3\sigma \leqslant X \leqslant m+3\sigma) \simeq 0,997$



Remarque : *cela signifie aussi que la probabilité d'obtenir une valeur de X distante de plus de σ de la moyenne μ est d'environ 32%, soit environ $1/3$, la probabilité d'obtenir une valeur de X distante de plus de 2σ de la moyenne μ est d'environ 5%, et celle d'obtenir une valeur de X distante de plus de 3σ de la moyenne μ est presque nulle (inférieure à $0,3\%$).*

Exemple : Les machines d'une usine produisent des éléments dont la masse affichée est de 200g.

En réalité, ces machines ne produisent pas exactement des éléments pesant 200g, mais avec une certaine imprécision (ou incertitude).

Une étude statistique (ou physique sur la précision des machines) montre que, si X désigne la variable aléatoire (continue) égale à la masse d'un élément à la sortie de l'usine, alors X suit la loi normale $\mathcal{N}(200;16)$.

La masse moyenne des objets produits est de $\mu = 200$g, mais avec un écart type $\sigma = \sqrt{16} = 4$g.

Cela signifie, entre autre, que

- $\sim 68\%$ des éléments pèsent entre $\mu-\sigma = 196$g et $\mu+\sigma = 204$g ;
  (et il y a donc une probabilité d'environ 32%, soit environ 1 chance sur 3, pour qu'un élément pris au hasard pèse moins de 196g ou plus de 204g ...)
- $\sim 95\%$ des éléments pèsent entre $\mu-2\sigma = 192$g et $\mu+2\sigma = 208$g ;
- $\sim 99,7\%$ des éléments pèsent entre $\mu-3\sigma = 188$g et $\mu+3\sigma = 212$g.

La valeur moyenne est la valeur affiché (sur l'emballage du produit par exemple, l'écart-type est bien souvent très difficile à trouver...)

Exercice 5 Soit X une v.a. suivant la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ avec $\mu = 80$ et $\sigma = 5$.

Calculer les porbabilités $P(X \leqslant 84)$, $P(X \leqslant 76)$ et $P(75 \leqslant X \leqslant 85)$ à l'aide de la calculatrice, puis à l'aide de la table des valeurs de $\Pi(x)$.

Exercice 6 Une usine de composants électroniques fabrique des résistances. En mesurant un grand échantillon de ces composants, on constate que la résistance nominale, exprimée en ohms, de chaque composant tiré au hasard est une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(1000;100)$.

Pour cet exercice, on utilisera uniquement les trois résultats suivants pour une variable U suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$: $P(-1,96 \leqslant U \leqslant 1,96) = 0,95$, $P(-1,64 \leqslant U \leqslant 1,64) = 0,9$, $P(U \leqslant 1) = 0,84$.

Vrai ou Faux ?

1. La probabilité que la résistance d'un composant tiré au hasard soit comprise entre $980\,\Omega$ et $1020\,\Omega$ est supérieure à 0,95.
2. La probabilité que la résistance d'un composant soit comprise entre $991\,\Omega$ et $1009\,\Omega$ est supérieure à 0,9.

3. La probabilité que la résistance d'un composant soit supérieure à 983,6 Ω est supérieure à 0,97.
4. La probabilité que la résistance d'un composant soit comprise entre 990 Ω et 1010 Ω est égale à 0,84.
5. La probabilité que la résistance d'un composant soit comprise entre 983,6 Ω et 1019,6 Ω est égale à 0,925.

Exercice 7 Soit X une v.a. suivant la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. On sait de plus que l'écart-type de X vaut $0,1$ et que $P(X \leqslant 0) = 0,5478$. Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 8 La durée de vie d'une clé USB, exprimée en mois, est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Selon le fabricant, 75 % des clés produites ont une durée de vie comprise entre 15 et 25 mois. La garantie s'applique sur cette période en considérant que 5 % des clés de la production ont une durée de vie inférieure à 15 mois.

1. Déterminer la moyenne et l'écart-type de la loi.
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 25 et 30 mois ?