Intégration

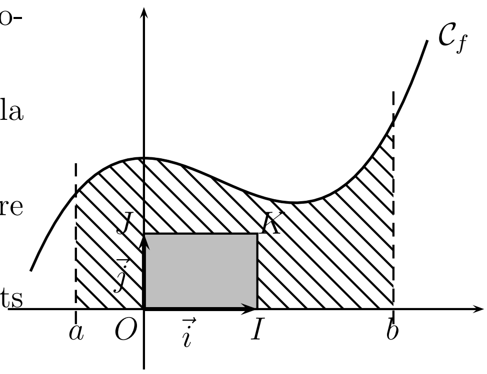
I - Aire sous une courbe : Intégrale d'une fonction continue positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On cherche à déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ situé sous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

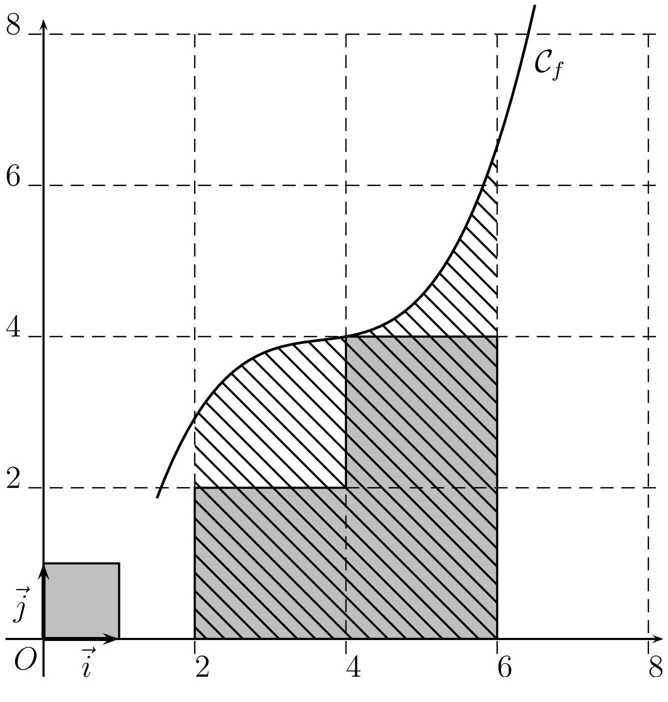
L'unité d'aire est donnée par le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$: l'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$.

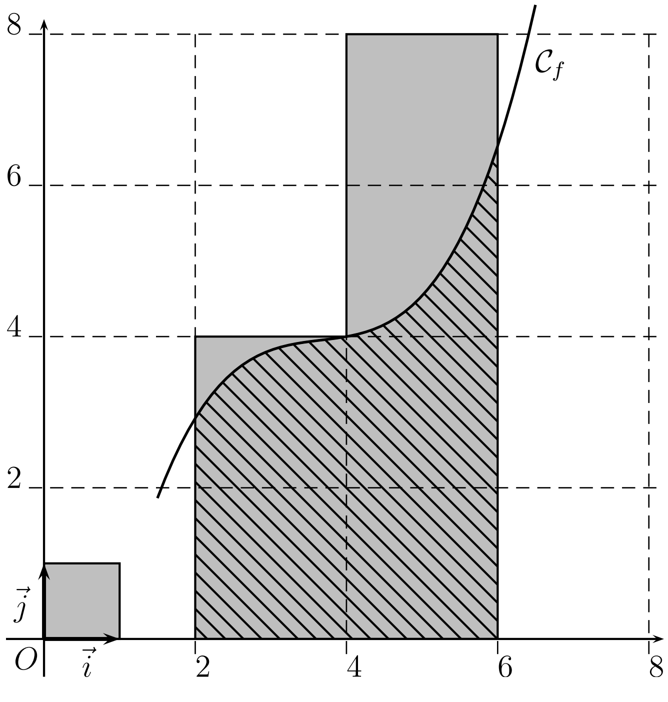
Plus précisément, le domaine $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $a \leq x \leq b$, et $0 \leq y \leq f(x)$.



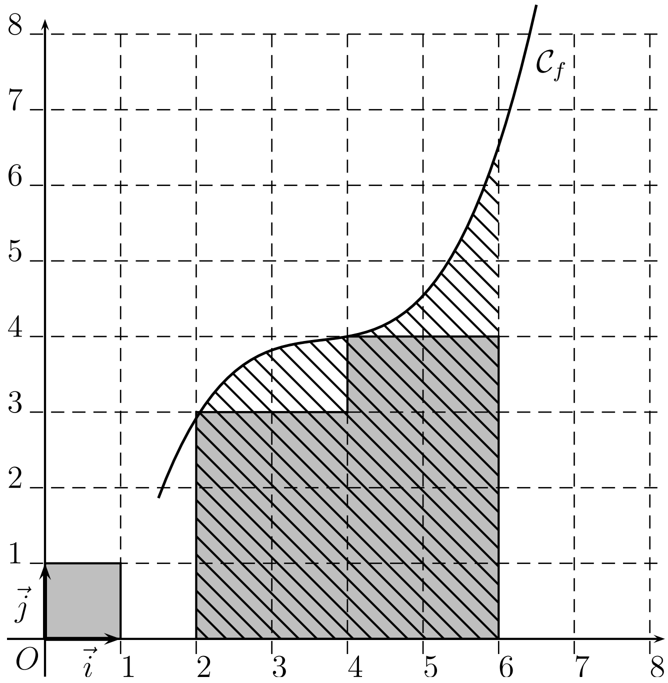
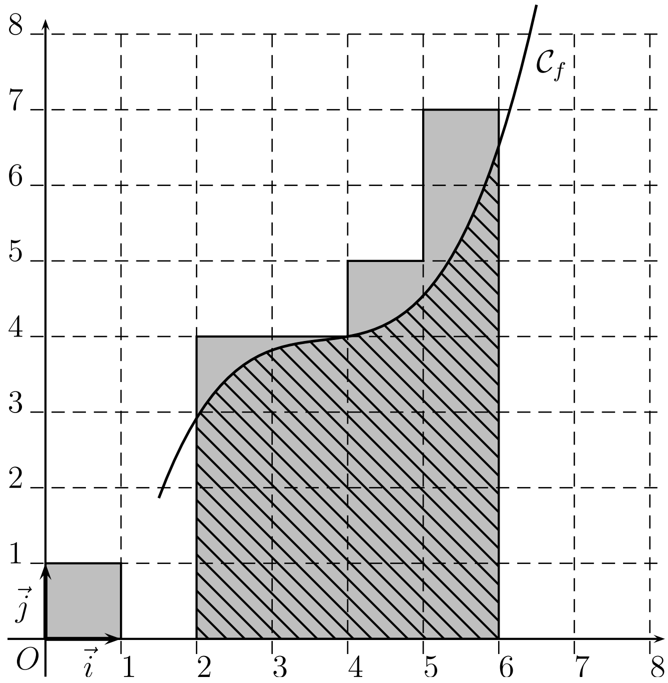
Cette aire s'appelle **l'intégrale de la fonction** f **de** a **à** b ; on la note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Les graphiques suivants donnent la courbe représentative d'une fonction f. Déterminer dans chacun des cas un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_2^6 f(x)dx$.

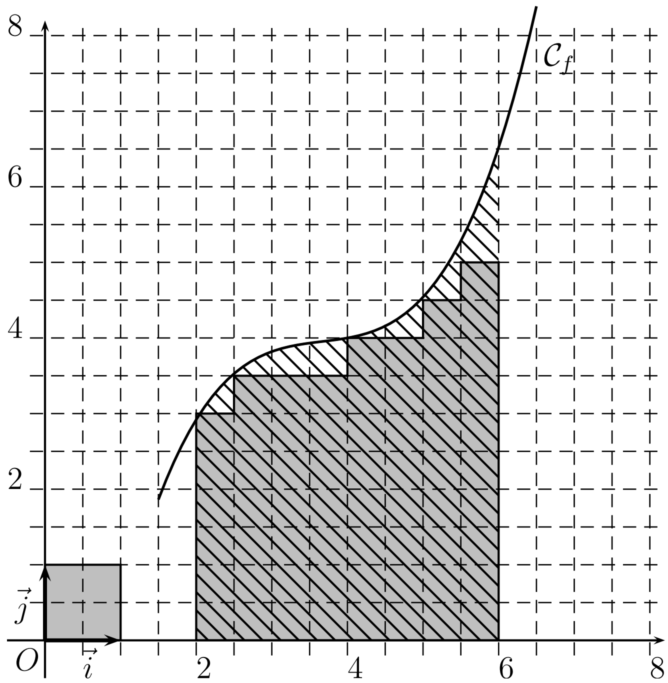
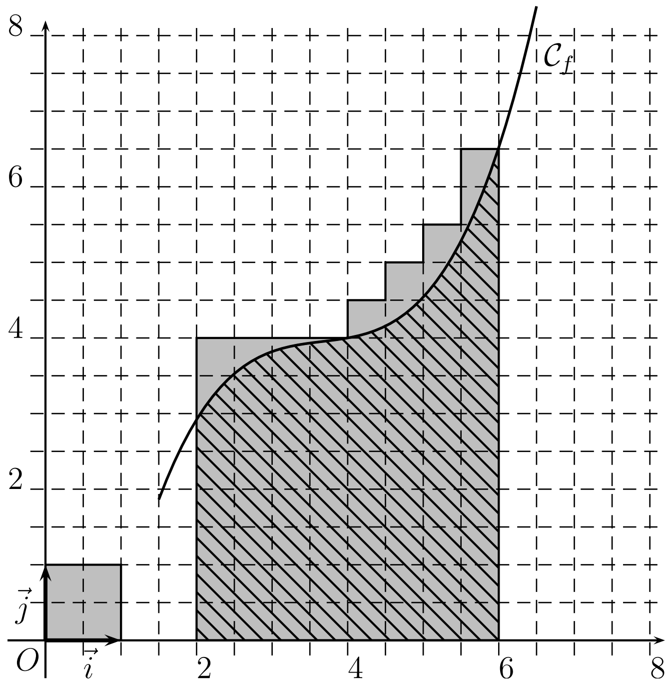




$$\dots \leq \int_2^6 f(x)dx \leq \dots$$

$$\cdots \leq \int_2^6 f(x)dx \leq \ldots$$

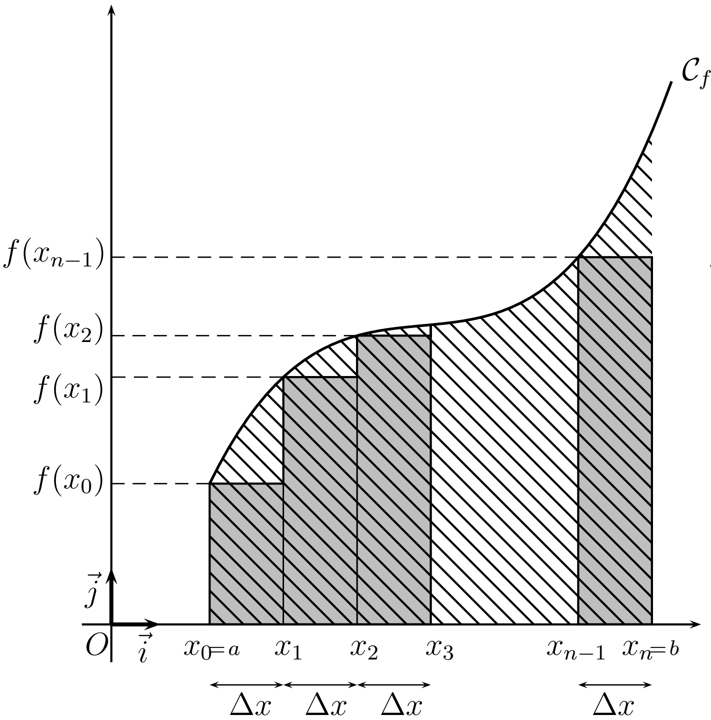
$$\cdots \leq \int_2^6 f(x)dx \leq \ldots$$

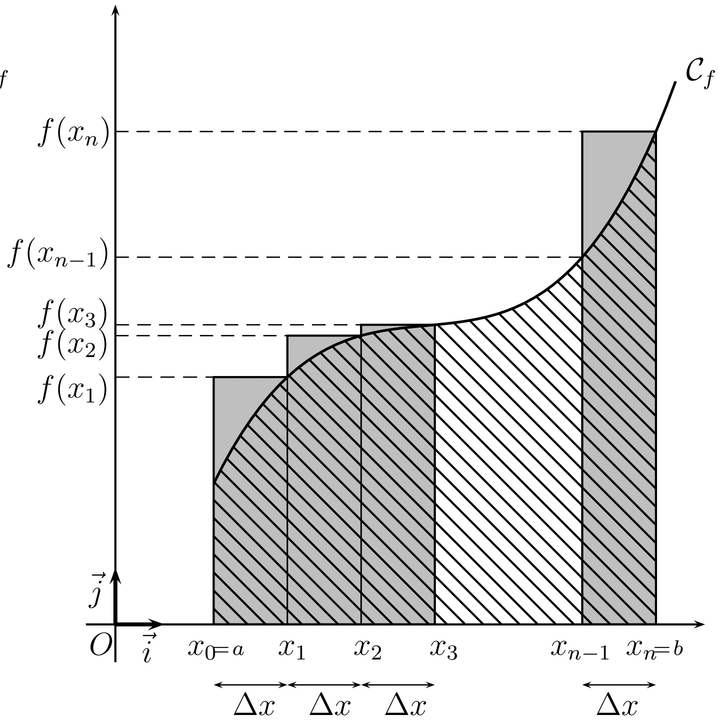
La situation précédente est généralisable.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$.

On découpe l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles de longueurs $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$:

$$[x_0;x_1] \ ; \quad [x_1;x_2] \ ; \quad [x_2;x_3] \ ; \quad \dots \ ; [x_{n-1};x_n]$$

avec $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, ...La suite (x_p) des abscisses est une suite arithmétique de raison Δx. En particulier, pour tout entier k, la $k^{\text{ème}}$ abscisse est $x_k = x_0 + k\Delta x$.





Dans les deux cas, l'aire grisée est la somme des aires de chaque rectangle qui la compose :

$$\begin{aligned} s_n &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ \dots \ + f(x_{n-1})\Delta x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} S_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ \dots \ + f(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \end{aligned}$$

L'aire hachurée est comprise entre ces deux aires grisées :

$$s_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_n$$

Ces deux suites (s_n) et (S_n) sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune qui est l'aire recherchée : l'intégrale de f de a à b.

<u>Remarque :</u> La notation $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *(introduite par Leibniz au XVII*$^{\text{e}}$ *siècle) s'explique à partir des calculs d'aire précédents, à la limite où* $\Delta x \to 0$, *et donc* $n \to +\infty$, *notée finalement* dx *(largeur infinitésimale), et le symbole* $\sum$ *se transformant en* $\displaystyle\int$ *:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

<u>Remarque 2 :</u> La variable x *est dite muette. La lettre qui la désigne n'a pas d'importance :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(\alpha)d\alpha = \ \dots$$

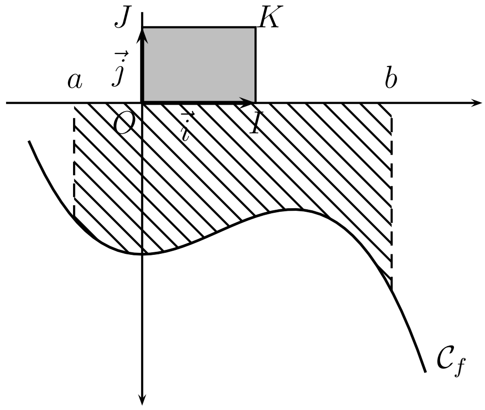
Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 x dx$ et, $J = \int_1^3 (2t+1)dt$.

Exercice 2 Calculer l'intégrale $\int_0^4 E(x)dx$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

II - Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

D'une manière plus générale, l'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ est l'aire **algébrique** du domaine compris entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

1) Intégrale d'une fonction continue négative

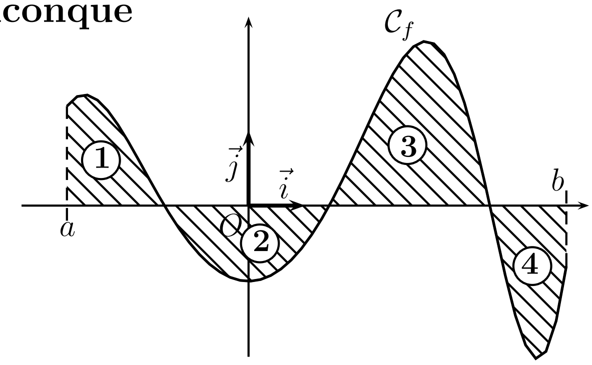


Soit f une fonction **continue et négative** sur un intervalle $[a;b]$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Dans ce cas, l'intégrale de f de a à b est l'opposé de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_f$:

$$\int_a^b f(x)dx = -\text{aire}\,(\mathcal{D})$$

2) Intégrale d'une fonction de signe quelconque



Pour une fonction f continue de signe quelconque sur un intervalle $[a;b]$, l'intégrale de f est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f garde un signe constant.

$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire}\,(\mathcal{D}_1) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_2) + \text{aire}\,(\mathcal{D}_3) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_4)$$

On convient de plus que : $\underline{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$.

Définition *Valeur moyenne d'une fonction*
Soit f continue sur $[a;b]$, avec $a<b$, alors la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le nombre réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

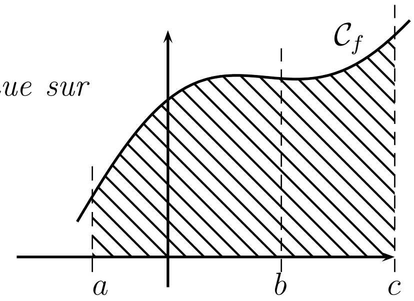
III - Propriétés de l'intégrale

Propriété <u>*Linéarité*</u> *Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a;b]$ et tout réel λ,*

- $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$

Propriété <u>*Relation de Chasles*</u> *Soit f une fonction continue sur $[a;c]$, et soit b un réel de $[a;c]$, alors*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$



Propriété <u>*Positivité*</u>

- *Si $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[a;b]$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- *Si $f(x)\leq 0$ pour tout $x\in[a;b]$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

Propriété <u>*Ordre et intégrale*</u>
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que, pour tout x de $[a;b]$, $f(x)\leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

<u>Démonstration :</u> Pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\leq g(x)$, et donc, $g(x)-f(x)\geq 0$.

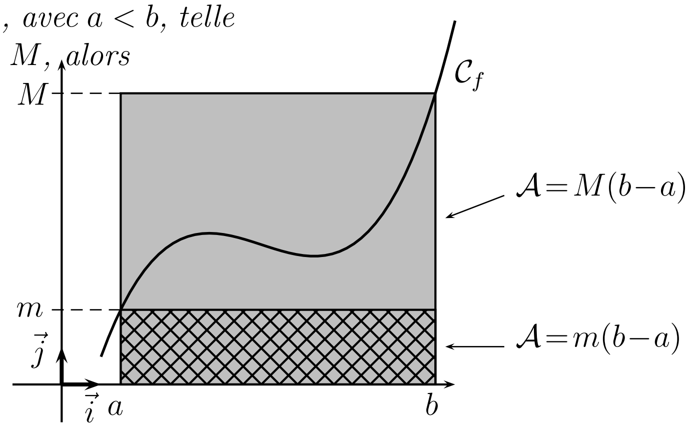
D'après la positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b \Big(g(x)-f(x)\Big)\,dx \geq 0$, et donc, d'après la linérarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b \Big(g(x)-f(x)\Big)\,dx = \int_a^b g(x) - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, d'où l'inégalité de la propriété.

Propriété <u>*Inégalités de la moyenne*</u>
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a<b$, telle que, pour tout $x\in[a;b]$, $m\leq f(x)\leq M$, alors

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

ou, de manière équivalente,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$



<u>Démonstration :</u> Pour tout $x\in[a;b]$, $m\leq f(x)\leq M$, et donc, d'après la propriété de l'ordre des intégrales :

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

Or, $\displaystyle\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ et, $\displaystyle\int_a^b M\,dx = M(b-a)$, d'où l'encadrement de la moyenne.

Exercice 3

a) Démontrer que pour tout réel t de $[0;1]$, on a $\dfrac{t}{1+t^2} \leq t$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 4x - 3$.

Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t \geq 2$, la fonction $F(t) = \displaystyle\int_2^t f(x)\,dx$.

Exercice 5 *(53 p 250)*

f est la fonction définie sur $[-2;2]$ par $f(x) = E(x^2)$ où E désigne la fonction partie entière.

1. Montrer que f est une fonction paire, et tracer sa représentation graphique sur l'intervalle $[0;2]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$. En déduire $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\,dx$.

IV - Primitive d'une fonction

Définition *Primitive d'une fonction*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle **primitive de** f **sur** *I toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée F' est égale à f.*

Ex : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 2$.

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{5}{2}x^2 + 2x + k$, où k est un nombre réel quelconque, sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.

Exercice 6 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- $f(x) = 3x^2 + x - 6$
- $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$
- $h(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$
- $k(x) = 2x + \sin(x)$

Propriété *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

On suppose qu'il existe une primitive F de f sur I.

Alors, l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$, où k est un réel.

Démonstration : • Si $G(x) = F(x) + k$, alors pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$, donc pour tout réel k, G est une primitive de f.

• Réciproquement, soit G une primitive de f, et soit la fonction K définie par $D(x) = G(x) - F(x)$.

Alors, pour tout $x \in I$, $D'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, car G et F sont des primitives de f.

Ainsi, $D = G - F$ est constante, soit $D(x) = G(x) - F(x) = k \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire, $G(x) = F(x) + k$.

Propriété *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet une primitive sur I (donc une infinité d'après le théorème précédent).*

Soit un réel $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Alors, il existe une **unique** *primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.*

Démonstration : Si G est une primitive sur I de f, alors toutes les primitives F de f sont de la forme $F(x) = G(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

La condition $F(x_0) = y_0$ s'écrit alors $F(x_0) = G(x_0) + k = y_0$, soit $k = y_0 - F(x_0)$.

La constante k est donc définie de manière unique, et il existe donc une unique primitive de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$, qui est définie par $F(x) = G(x) + k = G(x) + y_0 - F(x_0)$.

Exercice 7 Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$ telle que $F(1) = 0$.

Exercice 8 Déterminer la primitive G de $g : x \mapsto 12x^5 - 9x^2 + 6x - 3$ telle que $G(0) = 4$.

Exercice 9 Déterminer la primitive H de $h : x \mapsto \dfrac{4}{(2x+1)^2}$ telle que $H\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$.

V - Intégrales et primitives

Théorème *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$.*
Alors la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est **l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.**

Démonstration : Soit x_0 un réel de I, et h un réel tel que $x_0 + h \in I$. D'après la relation de Chasles :

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0}^{a} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Comme f est continue sur I, f est en particulieer continue sur $[x_0; x_0+h]$, et donc aussi, pour tout $t \in [x_0; x_0+h]$,

$$\underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\mathrm{Min}} f(x) \leq f(t) \leq \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\mathrm{Max}} f(x)$$

D'après la propriété de l'ordre des intégrales (ou les inégalités de la moyenne),

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\mathrm{Min}} f(x)dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\mathrm{Max}} f(x)dt$$

soit,

$$(x_0+h-x_0) \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\mathrm{Min}} f(x) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq (x_0+h-x_0) \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\mathrm{Max}} f(x)$$

c'est-à-dire,

$$h \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\mathrm{Min}} f(x) \leq F(x_0+h) - F(x_0) \leq h \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\mathrm{Max}} f(x)$$

ou encore,

$$\underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\mathrm{Min}} f(x) \leq \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leq \underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\mathrm{Max}} f(x)$$

Quand h tend vers 0, l'intervalle $[x_0; x_0+h]$ se réduit à $\{x_0\}$, et donc,

$$\lim_{h\to 0} \left(\underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\mathrm{Min}} f(x) \right) = \lim_{h\to 0} \left(\underset{x\in[x_0;x_0+h]}{\mathrm{Max}} f(x) \right) = f(x_0)$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

ce qui signifie exactement que la fonction F est dérivable en x_0, et que $F'(x_0) = f(x_0)$.
Ce raisonnement est valable pour tout $x_0 \in I$, et donc on a bien $F' = f$: F est **une primitive** de f.

On a de plus, $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$, et donc, F est **la primitive** de f s'annulant en a.

Exercice 10 Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Déterminer le sens de variation de F.

Propriété *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I, et F une primitive de f sur I. Alors,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

La quantité $F(b)-F(a)$ se note souvent $F(b)-F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$, et ainsi

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration : Soit $\alpha \in I$, et $F(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,dt$ la primitive de f qui s'annule en α.

On a alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^\alpha f(t)\,dt + \int_\alpha^b f(t)\,dt = -\int_\alpha^a f(t)\,dt + \int_\alpha^b f(t)\,dt = -F(a) + F(b)$.

VI - Calcul d'intégrale

1) Recherche de primitive

Primitives des fonctions usuelles

$f(x) =$	$F(x) =$	Intervalle
$k \in \mathbb{R}$	$kx + C$	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + C$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}} + C$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	R_+^*
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Primitives et opérations

f	F
$u'u^n$	$\dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{u^n} + C$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u} + C$
$\dfrac{u'}{u^n}$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}} + C$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$
$u'e^u$	e^u

Exercice 11 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + \dfrac{7}{3}x + 2$ b) $f(x) = -\sin(x) + 2\cos(x)$ c) $f(x) = 2x - 4 + \dfrac{3}{x^2}$

Exercice 12 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2(x^3-1)^5$ b) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-4)^2}$ c) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$

2) Intégration par parties

Théorème *Intégration par parties Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.*
On suppose de plus que les dérivées u' et v' sont continues sur I. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration : Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v+uv'$.
De plus, les fonctions u, v, u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue, et

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

et donc, comme la fonction uv est une primitive de $(uv)'$, on obtient :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes :

- $I = \int_0^{\pi} x\sin(x)dx$
- $J = \int_0^{3} xe^x\,dx$
- $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)dx$
- $L = \int_0^{\pi} (2-2x)\sin(x))\,dx$

Exercice 14 *(5 p267)*

I et J sont les intégrales définies par $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(x)\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\,dx$.

a) En appliquant de deux façons différentes à l'intégrale I la méthode d'intégration par parties, trouver deux relation entre I et J.

b) Calculer alors les intégrales I et J.

Exercice 15 *(36 p276)* Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx$. A l'aide d'une double intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.

Exercice 16 *(3 p267)* Soit I la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $I_n = \int_0^1 t^n\,e^{-t}\,dt$.

1. Calcul des premiers termes de la suite
   a) Calculer $I_1 = \int_0^1 te^{-t}dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
   b) Avec la méthode d'intégration par parties, exprimer I_2 en fonction de I_1. En déduire I_2.
   c) Exprimer I_3 en fonction de I_2, puis calculer I_3.

2. Etude de la suite
   a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n \geq 0$.
   b) Etudier le sens de variation de la suite I.
   c) Démontrer que la suite I est convergente.

3. Calcul de la limite de la suite
   a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
   b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n \leq \dfrac{1}{ne}$.
   c) En déduire la limite de la suite I.