Limites de suites - Récurrence - Exercices $\quad T^{\text{ale}}S$

Exercice 1 Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{n+325}$ b) $u_n = \dfrac{2n^2-3n+2}{1-n}$ c) $u_n = \dfrac{4n^2+1}{n(2n+1)}$ d) $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n}+17}$

e) $u_n = \dfrac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}}$ f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}}$ g) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ h) $u_n = \sqrt{n^2+n}-n$

Exercice 2 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 5u_n + 4$.
Montrer que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 5 - 4u_n$.
Montrer que, pour tout entier n, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Exercice 4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{u_n+2}$.
Montrer que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

Exercice 5 Montrer que, pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

(Rappel : pour tout entier n, $\quad n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$*).*

Exercice 6 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Calculer u_2, u_3 et u_4.
Démontrer que, pour tout entier n, $u_n = 2^n$.

Exercice 7 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

1. Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{4}x + 3$, puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisse respective u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que, pour tout entier n, $u_n \leqslant 4$.
3. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 8 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n+3}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite, et conjecturer le sens de variation de la suite (u_n). Démontrer cette conjecture.
2. Montrer que, pour tout entier n, $0 < u_n < 3$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite l.
4. Déterminer l.

Exercice 9 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2 \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
3. En déduire que, pour tout $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 10 Soit, pour tout entier n, $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1}$.

Montrer que pour tout entier n, $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 11 Soit, pour tout entier n, $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$.

Montrer que pour tout entier n, $\dfrac{n-1}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n^2+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 12 Soit, pour tout entier n, $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$.

Montrer que pour tout entier n, $u_n \geqslant \dfrac{n-1}{3}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 13 Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}$..

1. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.
   Quel semble être la limite de (u_n) ?
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.
3. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Exercice 14 Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 \geq -3 \\ u_{n+1} = \sqrt{3+u_n} \end{array}\right.$

Quelle valeur de u_0 faut-il prendre pour que la suite (u_n) soit stationnaire ?

Exercice 15 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer que, pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$.
3. Montrer que (u_n) est une suite croissante.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose, pour tout entier n, $v_n = u_n - 2$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
6. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Déterminer l'expression de S_n, puis de T_n, en fonction de n.
7. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$.

Exercice 16 Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. a. Montrer que, pour tout $n\mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
   b. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.
   c. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$
   a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$
   b. Déterminer la limite de la suite (x_n).