

Exercice 1 L'affaire Castaneda contre Partida

L'ensemble des faits évoqués ci-dessous est réel.

En Novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida était condamné à huit ans de prison pour cambriolage d'une résidence et tentative de viol.

Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que 79,1% de la population du comté était d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors d'une certaine période de référence, il n'y eût que 339 personnes d'origine mexicaine.

1. Commenter...
2. Commenter, interpréter et détailler les éléments techniques de l'extrait de l'attendu de la cour suprême dans l'affaire Castaneda contre Partida donné ci-dessous :

« Si les jurés étaient tirés au hasard dans l'ensemble de la population, le nombre d'américains mexicains dans l'échantillon pourrait alors être modélisé par une distribution binomiale... »

Etant donné que 79,1% de la population est mexico américaine, le nombre attendu d'américains mexicains parmi les 870 personnes convoquées en tant que grands jurés pendant la période de 11 ans est approximativement 688. Le nombre observé est 339. Bien sûr, dans n'importe quel tirage considéré, une certaine fluctuation par rapport au nombre attendu est prévisible. Le point essentiel cependant, est que le modèle statistique montre que les résultats d'un tirage au sort tombent vraisemblablement dans le voisinage de la valeur attendue... La mesure des fluctuations prévues par rapport à la valeur attendue est l'écart type, défini pour la distribution binomiale comme la racine carrée de la taille de l'échantillon (ici 870) fois la probabilité de sélectionner un américain mexicain (ici 0,791) fois la probabilité de sélectionner un non américain mexicain (ici 0,209)...

Ainsi, dans ce cas, l'écart type est approximativement de 12. En règle générale pour de si grands échantillons, si la différence entre la valeur attendue et le nombre observé est plus grand que deux ou trois écarts types, alors l'hypothèse que le tirage du jury était au hasard serait suspect à un spécialiste des sciences humaines. Les données sur 11 années reflètent ici une différence d'environ 29 écarts types. Un calcul détaillé révèle qu'un éloignement aussi important de la valeur attendue se produirait avec moins d'une chance sur 10^{140} . »

Exercice 2 Avant le premier tour de l'élection présidentielle de 2002 un sondage IPSOS, réalisé auprès de 989 personnes constituant un échantillon national représentatif de la population française inscrite sur les listes électorales, annonçait les intentions de vote suivantes :

20 % pour J. Chirac, 18 % pour L. Jospin et 14 % pour J.M. Le Pen.

Les médias se préparaient donc pour un second tour entre J. Chirac et L. Jospin.

Le résultat réel des votes à ce premier tour a alors surpris bien des personnes ...

1. Déterminer, pour chaque candidat, l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 0,95 de la proportion d'électeurs ayant eu l'intention de voter pour lui.
2. Les résultats à l'issue du premier tour ont été les suivants :
19,88 % pour J. Chirac, 16,18 % pour L. Jospin et 16,86 % pour J.M. Le Pen.
Ces pourcentages sont-ils en accord avec les calculs précédents ?
3. Pouvait-on au vu de ce sondage écarter avec un niveau de confiance de 0,95 l'un de ces trois candidats ?

Exercice 3 Un laboratoire pharmaceutique met en place un test pour estimer l'efficacité d'un nouveau médicament contre les migraines.

Deux groupes de 125 patients souffrant de migraines, considérés comme des échantillons aléatoires, participent à ce test.

On administre aux patients du groupe A le nouveau médicament, tandis que les patients du groupe B reçoivent un placebo.

Au bout de 4 jours de traitement, 73 patients du groupe A et 64 patients du groupe B déclarent ressentir une diminution de l'intensité de leurs migraines.

- Déterminer les intervalles de confiance au niveau de confiance de 0,95 des proportions de patients déclarant ressentir une diminution de l'intensité de leurs migraines, dans chaque échantillon.
- Les intervalles de confiance permettent-ils, au niveau de confiance 0,95, de considérer que le médicament est plus efficace que le placebo ?
- Quelle devrait-être la taille minimale de chaque échantillon pour que, avec des proportions indentiques à celles observées précédemment, les résultats confirment l'efficacité du médicament, au niveau de confiance 0,95.

Exercice 4 Impact d'une campagne publicitaire

Une entreprise possède 12% des parts de marché sur un de ses produits.

Elle souhaite mieux se positionner sur ce produit et lance donc une vaste campagne publicitaire.

Pour vérifier rapidement l'efficacité de cette campagne, elle procède à une étude auprès de 50 clients potentiels. 18 d'entre eux sont clients du produit de l'entreprise.

Peut-on considérer que la campagne a eu un impact positif ?

Exercice 5 Dimensionnement d'une cantine

Dans un établissement de 3000 personnes, chaque personne peut ou non, librement, manger à la cantine chaque jour. En moyenne 65% des personnes y mangent.

On souhaite estimer le nombre de places assises dans la cantine telle manière que toutes les personnes aient une place pour manger. Par ailleurs, par soucis d'économie, on souhaite aussi que le nombre de places prévues soit minimal.

Combien de places doit-on prévoir ?

Exercice 6 Dans une expérience de perception extra-sensorielle on demande à un sujet d'indiquer la couleur d'un jeton tiré aléatoirement dans un sac par un expérimentateur placé dans une autre pièce. Ni le sujet, ni l'expérimentateur ne connaissent la proportion de jetons de chaque couleur dans le sac.

On choisit la règle de décision suivante : si le pourcentage de couleurs devinées correctement appartient à l'intervalle de fluctuation autour de 50% à un certain seuil fixé à l'avance, on considère que le sujet n'a pas de don de perception extra-sensorielle, sinon on considère qu'il a un don.

Un sujet fait le test, et identifie correctement la couleur de 32 jetons sur 50 essais.

Appliquer la règle de décision aux seuils de 95%, puis de 99%.

Exercice 7 Un magasin estime qu'il peut compter sur environ 10 000 clients réguliers. Son objectif de qualité est d'avoir un taux de satisfaction supérieur à 90% (idéalement entre 95% et 99%).

Il commande alors à un institut de sondage une étude auprès de ses clients réguliers afin de mesurer ce taux réel de satisfaction.

Par souci de précision, le magasin exige un résultat fiable à plus ou moins 2% avec un risque d'erreur d'au plus 5%.

Combien de personnes l'institut de sondage doit-il interroger au minimum ?

Exercice 8 Une entreprise livre des objets assez fragiles. On compte en général 3,5% d'objets cassés lors de la livraison.

Combien faut-il en commander pour être sûr à 95% d'en recevoir 420 en bon état ?