Dérivation des fonctions

$T^{\text{ale}}S$

I - Révisions

Exercice 1 Soit f une fonction dérivable en 1.

a) Rappeler la définition du nombre dérivée de f en 1.

b) Comment s'interprète géométriquement ce nombre ?

Exercice 2 Etudier la fonction f définie par l'expression : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Déterminer l'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.

Tracer T_0 et $\mathcal{C}_f$.

II - Dérivabilité et tangente

Définition *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

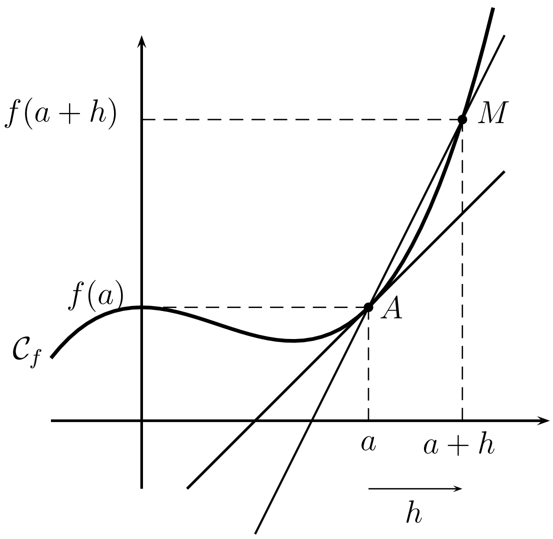
- *Pour $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$, on appelle* **taux de variation** *en $a \in I$,*

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- *La fonction f est dérivable en a si la limite du taux de variation lorque h tend vers* 0 *existe.*
  Dans ce cas, la limite est le **nombre dérivée de** f *en a, noté $f'(a)$:*

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

- *Une fonction est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout réel x de I.*
  On appelle alors **fonction dérivée** *de f la fonction $x \mapsto f'(x)$.*



Le taux de variation est le coefficient directeur de la corde (AM) :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Lorsque h tend vers 0, le point M tend vers le point A, et la corde (AM) "tend vers" la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A,

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = f'(a)$$

$$\boxed{\text{le nombre dérivé } f'(a) \text{ est le coefficient directeur de la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ au point d'abscisse } a.}$$

Autres notations *On note souvent avec un "Δ" les variations, ainsi le coefficient directeur d'une droite passant par $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ s'écrit selon la formule :* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Le taux de variation de la fonction au point d'abscisse x s'écrit, selon cette notation, $\tau = \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

La dérivée $f'(x)$ s'obtient en étudiant la limite du taux de variation lorsque $\Delta x \to 0$, ce que l'on note encore :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}$$

qui se lit, "la dérivée de f par rapport à x".

Cette notation a été en premier introduite par Leibniz (1646-1716), mathématicien, physicien, logicien, philosophe, diplomate, homme de loi, allemand (ainsi que les termes de "fonction", "coordonnées", du symbole intégral "$\displaystyle\int_a^b$", et des concepts de continuité et d'énergie cinétique (force vive), entre autres...

Exercice 3 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

Montrer que f est dérivable en $x = 2$ et en déduire $f'(2)$.

Déterminer directement la fonction dérivée f' de f, et retrouver le résultat précédent.

Exercice 4 Soit la fonction g définie par l'expression $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$.

Montrer que g est dérivable en $x = 1$ et en déduire $g'(1)$.

Déterminer directement la fonction dérivée g' de g, et retrouver le résultat précédent.

Exercice 5 Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \sqrt{x}$.

Montrer que la fonction h n'est pas dérivable en 0.

Que peut-on en déduire concernant la courbe représentative de h ?

Equation de la tangente La tangente à $\mathcal{C}_f$ a une équation de la forme $y = mx + p$, avec le coefficient directeur $m = f'(a)$, soit l'équation $y = f'(a)x + p$.

La tangente passe de plus par le point $A(a; f(a))$, d'où, $f(a) = f'(a)a + p$, et donc, $p = f(a) - f'(a)a$.

Ainsi, l'équation de la tangente est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$, ou encore,

Propriété *Soit une fonction dérivable en a, alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse a d'équation*

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Approximation affine d'une fonction La tangente est "la droite la plus proche de $\mathcal{C}_f$" au voisinage de $\mathcal{C}_f$. D'après ce qui précède la fonction φ définie par

$$\varphi(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

vérifie, $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$. Cette relation se réécrit aussi :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \quad \text{où, } \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

ou, en posant $x = a + h \Leftrightarrow h = x - a$,

$$f(x) = \underbrace{f(a) \ + \ (x-a)f'(a)}_{\text{équation de la tangente}} + (x-a)\varphi(x-a) \quad \text{où, } \lim_{x \to a} \varphi(x-a) = 0$$

Théorème *Une fonction dérivable en un réel a est continue en a.*

<u>Démonstration :</u> D'après ce qui précède, si f est dérivable en a, alors

$$f(x) = f(a) \ + \ (x-a)f'(a) + \ (x-a)\varphi(x-a) \ \text{ où, } \lim_{x\to a} \varphi(x-a) = 0$$

et donc, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

<u>Attention !</u> *la réciproque est fausse : une fonction peut-être continue mais non dérivable en a.*

Par exemple, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ sont continues en $x = 0$ (tracer leur courbe représentative) mais ne sont pas dérivables en $x = 0$.

III - Dérivées usuelles et règles de dérivation

<table>
<tr><th>Fonction</th><th>Dérivée</th><th>Ensemble de définition</th><th>Ensemble de dérivabilité</th></tr>
<tr><td>$k \in \mathbb{R}$ (constante)</td><td>0</td><td rowspan="3">$\mathbb{R}$</td><td rowspan="3">$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$</td><td>nx^{n-1}</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{1}{x}$</td><td>$-\dfrac{1}{x^2}$</td><td rowspan="2">$\mathbb{R}^*$</td><td rowspan="2">$\mathbb{R}^*$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{1}{x^n}$</td><td>$-\dfrac{1}{x^{n+1}}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x}$</td><td>$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$</td><td>$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$</td><td>$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>$\cos(x)$</td><td>$-\sin(x)$</td><td rowspan="2">$\mathbb{R}$</td><td rowspan="2">$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$\sin(x)$</td><td>$\cos(x)$</td></tr>
</table>

Opérations sur les dérivées

u et v désignent deux fonctions quelconques, définies respectivement sur D_u et D_v, dérivables sur D'_u et D'_v.

On note de plus

$D_v^* = \{x \in D_v, \text{ tel que, } v(x) \neq 0\}$

Fonction	Dérivée	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité
ku, $k \in \mathbb{R}$	ku'	$D_u \cap D_v$	$D'_u \cap D'_v$
$u + v$	$u' + v'$	$D_u \cap D_v$	$D'_u \cap D'_v$
uv	$u'v + uv'$	$D_u \cap D_v$	$D'_u \cap D'_v$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$D_u \cap D_v^*$	$D'_u \cap D'^*_v$
$u \circ v$ $u(v(x))$	$v' \times u' \circ v$ $v'(x) \times u'(v(x))$		

Théorème • *Les fonctions polynômes, sinus et cosinus sont dérivables sur* $\mathbb{R}$. *La fonction racine carrée est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^* =]^\circ;+\infty[$.

- *Une fonction construite par opérations ou par compositions à partir des précédentes est dérivable sur l'intersection ou la composition des domaines de dérivabilité de ces fonctions.*
- *En particulier, une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.*

Exercice 6 *Dérivée de la fonction tangente.*

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction $\tan : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$, *puis sa fonction dérivée.*

Exercice 7 Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur fonction dérivée.

- $f : x \mapsto x^{23} - 12x^{11} + 3,5x^7 - \dfrac{1}{x}$
- $g : x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{x+2}$
- $h : x \mapsto \sqrt{+3}$
- $k : x \mapsto \dfrac{x^3+3x+1}{2x^2+4x+8}$
- $l : x \mapsto \sqrt{x^2+3x-10}$

Exercice 8 Montrer que la fonction $k : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{1+x}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$.

Opérations usuelles

u est une fonction quelconque définie et dérivable sur un intervalle I (et ne s'annulant pas sur I pour les quotients et racines carrées).

En utilisant la règle de dérivation d'une fonction composée, on obtient les formules suivantes :

Fonction	Dérivée
u^n, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u^n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$	$-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$

Exercice 9 Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en précisant à chaque fois l'ensemble de définition et celui de dérivabilité.

- $f_1(x) = \dfrac{x^2+2}{x-5}$
- $f_2(x) = x^2\cos(x)$
- $f_3(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $f_4(x) = \cos(2x+3)$
- $f_5(x) = (2x^2+3x-2)^7$
- $f_6(x) = \sqrt{4-x^2}$
- $f_7(x) = -4x + 6x\sqrt{x}$
- $f_8(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
- $f_9(x) = \left(\dfrac{3x-4}{x-1}\right)^3$
- $f_{10}(x) = \sqrt{3x^2 - \dfrac{1}{9x}}$

IV - Etude de fonctions

Théorème *Soit f une fonction dérivable sur I, alors f est continue sur I et :*

- *Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, f est strictement croissante sur I ;*
- *Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante sur I ;*
- *Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, f est constante sur I.*

Exercice 10 f est la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$.

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et Γ celle de la fonction sinus sur l'intervalle $[0;\pi]$.

1. Montrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et Γ admettent au point O une même tangente T. Donner une équation de T.
2. Etudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et Γ.
3. Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et Γ.

Théorème *Si une fonction f dérivable sur I admet un extremum en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$.*

La réciproque est fausse. La dérivée d'une fonction peut s'annuler sans que cela ne corresponde à un extremum pour la fonction.

Par exemple, soit $f : x \mapsto x^3$, vérifie $f'(0) = 0$, mais $f(0)$ n'est pas un extremum pour la fonction cube (qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

Exercice 11 Déterminer les extrema éventuels de $f : x \mapsto x + \dfrac{2}{x}$.

Vérifier que ces points sont bien des extrema, et préciser s'il s'agit de minima ou de maxima.

Exercice 12 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4 \ .$$

Démontrer que -6 est un minorant de f sur $[0;+\infty[$.

Exercice 13 f_m est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ par :

$$f_m(x) = \frac{x^2 + mx}{x^2 - 1} \ , \text{ où, } m \text{ est un réel.}$$

a) Pour quelles valeurs de m, f_m n'admet-elle ni maximum ni minimum ?

b) Pour quelles valeurs de m, f_m a-t-elle un maximum et un minimum ?

Exercice 14 *(31 p 139)*

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $g(x) = 9 + \dfrac{12}{x-3}$.

1. a) Dans un même repère, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.

   b) Indiquer, par lecture graphique, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = g(x)$.

2. h est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par : $h(x) = (x-3)\,[f(x) - g(x)]$.

   a) Etudier les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.

   b) Etudier les variations de h et dresser son tableau de variations.

   c) En déduire que l'équation $f(x) = g(x)$admet trois solutions.

   d) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chaque solution.

Exercice 15 *(34 p139)*

On note (E) l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ et (I) l'inéquation $x^3 - 15x - 4 > 0$.

1. Résolution graphique

a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $x^2 - 15 = \dfrac{4}{x}$

b) Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^2 - 15$ et $x \mapsto \dfrac{4}{x}$.

c) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E).
Une des solutions est un nombre entier, quelle est sa valeur ?
Encadrer chacune des autres solutions α et β (avec $\alpha < \beta$) par deux entiers consécutifs.

d) Démontrer que l'inéquation (I) s'écrit sur $]0; +\infty[$, $x^2 - 15 > \dfrac{4}{x}$, et sur $]-\infty; 0[$, $x^2 - 15 < \dfrac{4}{x}$.

2. Etude d'une fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 15x - 4$. $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère.

a) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
b) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
c) Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations.
d) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.
e) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.
f) Donner un encadrement à 10^{-2} près de chacune des solutions.
g) Etudier le signe de la fonction f. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (I).

3. Méthode algébrique

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x, $x^3 - 15x - 4 = (x-4)(ax^2 + bx + c)$.
b) Résoudre alors (E) et (I).

Exercice 16 *(41 p 141)* f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$.

1. a) Calculer la dérivée de f' de la fonction f.

   b) Calculer la dérivée seconde f'' de f.

2. a) Déterminer les variations de la fonction f'.

   b) Dresser le tableau de variation de f'.
   Prouver que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique c et que cette solution appartient à l'intervalle $]-\infty; -1]$.

   c) Donner un encadrement de c d'amplitude 10^{-2}.

3. a) Déterminer le signe de la fonction f'.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f'.

   c) Montrer que $f(c) = \dfrac{3c(4-c)}{4}$

   d) Déterminer le nombre de racines du polynôme f.