

## I - Révisions

**Exercice 1** Déterminer la limite en  $+\infty$  des fonctions suivantes et interpréter graphiquement le résultat :

•  $f(x) = \frac{1}{x}$       •  $g(x) = \frac{1}{x^2}$       •  $h(x) = \frac{2x + 3}{x^3 - 6x + 2}$       •  $l(x) = \frac{9x^3 + 2}{-3x^3 + 6x^2 - 127x + 32}$

**Exercice 2**

1. Déterminer le signe de  $P(x) = -x^2 + x$

2. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de  $g(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{-x^2 + x}$ .

Interpréter graphiquement ces résultats.

**Exercice 3** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout entier  $n$ , par la relation de récurrence :  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 3$ .

1. Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .

2. La suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique ? géométrique ?

3. On définit la suite  $(v_n)$  par, pour tout entier  $n$ ,  $v_n = u_n - \frac{9}{2}$ .

a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.

b) En déduire l'expression de  $v_n$ , puis de  $u_n$ , en fonction de  $n$ .

c) Déterminer alors la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 4** Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 1$  et par la relation, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{9u_n - 15}{u_n + 1}$$

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

2. Soit la suite  $v_n$  définie pour tout entier  $n$ , par  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 5}$ .

a) Exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .

Quelle est la nature de la suite  $(v_n)$ .

b) En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

c) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$ , puis de  $n$  seulement.

d) Déduire de ce qui précède la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 5** Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$$

1. a) Montrer que la suite  $v$  définie par  $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$  est géométrique.

b) Exprimer alors  $v_n$  en fonction de  $n$ .

2. a) Exprimer en fonction de  $n$  la somme  $S_n = 0,5 + (0,5)^2 + (0,5)^3 + \dots + (0,5)^n$ .

b) Exprimer alors  $u_n$  en fonction de  $n$ .

## II - Limite d'une fonction

**Exercice 6** Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-1; 5]$  par :  $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{pour } , x \in [-1; 2[ \\ -2x + 7 & \text{pour } , x \in [2; 5] \end{cases}$

Tracer la courbe représentative de  $f$ , et déterminer la limite en 2 de  $f$ .

### 1) Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

#### Définition Continuité

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

- Dire que  $f$  est **continue en  $a$**  signifie que  $f$  admet une limite en  $a$  égale à  $f(a)$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- Dire que  $f$  est **continue sur  $I$**  signifie que  $f$  est continue en tout réel de  $I$ .

**Exercice 7** (4 p135) Soit  $m$  un nombre réel et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si, } x \leq 0 \\ x + m & \text{si, } x > 0 \end{cases}$$

- On choisit  $m = 1$ . Tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère, et lire graphiquement si la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Pour quelle valeur de  $m$  la fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ?

#### Propriété Continuité des fonctions usuelles

- Les fonctions polynômes, sinus, cosinus sont continues sur  $\mathbb{R}$ . La fonction racine carrée est continue sur  $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ .
  - Les fonctions construites par opérations ou par composition à partir des précédentes sont continues sur leur ensemble de définition.
- En particulier, les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

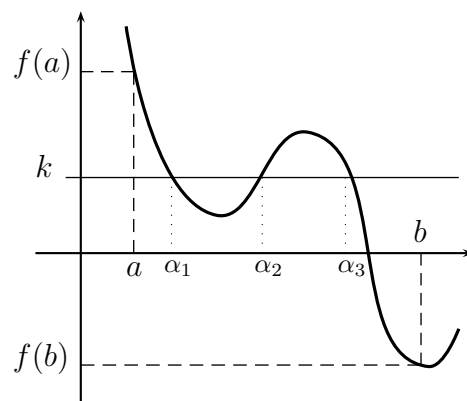
**Exercice 8** Déterminer le plus grand intervalle de  $\mathbb{R}$  sur lequel la fonction  $f$  est continue dans chacun des cas : •  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 132x^2 - 8$  •  $f(x) = x \sin(x)$  •  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 7}{x^2 - 1}$

#### Théorème Théorème des valeurs intermédiaires

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle  $I$ , et  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ .

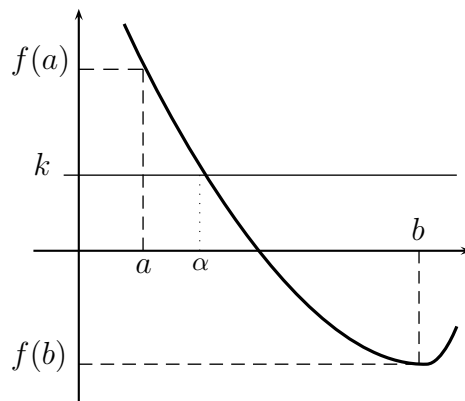
Alors, pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $\alpha$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(\alpha) = k$ .

$$\exists \alpha \in [a; b] \quad / \quad f(\alpha) = k$$



**Théorème** *Théorème des valeurs intermédiaires*

Soit  $f$  une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle  $I$ , et  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ .  
Alors, pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un unique réel  $\alpha$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(\alpha) = k$ .



$$\exists! \alpha \in [a; b] \quad / \quad f(\alpha) = k$$

Remarque : On dit dans ce cas que  $f$  réalise une **bijection** de  $[a; b]$  sur  $[f(a); f(b)]$  :

$$\forall k \in [f(a); f(b)], \exists! \alpha \in [a; b] \quad / \quad f(\alpha) = k$$

**Exercice 9** (18 p137)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x^3 - 2x + 5$ .

Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .

En déduire le signe de  $f$ .

**Exercice 10** (20 p137)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ .

a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

b) Montrer que  $1,67 < \alpha < 1,68$ .

**Exercice 11** (26 p138)

Montrer que l'équation  $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = 1$  admet une unique solution sur  $[0; 1]$   
(Indication : en particulier pour  $x > 0!$ ).

**Méthode par dichotomie** De façon générale, si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $[a; b]$  et que  $f(a)f(b) < 0$ , alors, on sait d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe une unique solution  $\alpha \in [a; b]$  à l'équation  $f(x) = 0$ .

On cherche alors à donner un encadrement de  $\alpha$ .

La méthode par dichotomie suit le principe suivant : on découpe l'intervalle  $[a; b]$  en deux intervalles de même taille : soit  $c$  le centre de l'intervalle  $[a; b]$ , c'est-à-dire  $c = \frac{a+b}{2}$ , et les deux intervalles  $I_1 = [a; c]$  et  $J_1 = [c; b]$ .

Ensuite, on localise l'intervalle dans lequel se trouve  $\alpha$ , grâce encore au théorème des valeurs intermédiaires :  
 • si  $f(a)f(c) < 0$ , alors  $\alpha \in I_1 = [a; c]$ ;  
 • sinon, si  $f(c)f(b) < 0$ , alors  $\alpha \in J_1 = [c; b]$ ;

On a alors réduit de moitié la taille de l'intervalle contenant  $\alpha$ , et on peut recommencer le processus dans le nouvel intervalle  $I_1$  ou  $J_1$ .

L'algorithme de la méthode de dichotomie peut s'écrire ainsi, si on souhaite une valeur approchée de  $\alpha$  avec la précision  $\varepsilon$  :

```

Tant que (b-a)>ε
  c=(a+b)/2
  Si f(a)*f(c)<0, alors b=c
  Sinon, a=c
Fin Test Si
Fin Boucle Tant que
    
```

En  $N$  boucles de cet algorithme, on obtient une valeur approchée de la solution avec une précision de  $\frac{b-a}{2^N}$ .

## 2) Théorèmes de comparaison

### **Théorème** Théorème des gendarmes pour les fonctions

Soit  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions,  $a$  un réel ou  $\pm\infty$  et  $I$  un intervalle contenant  $a$  ( $I = [\dots; +\infty[$  si  $a = +\infty$ ) tels que :

$$\text{pour tout } x \in I, \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Si de plus  $g$  et  $h$  ont la même limite en  $a$  :  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .

Démonstration : Cas  $a = +\infty$ .

$$\left( \begin{array}{l} \text{Rappel : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \text{ signifie que tout intervalle ouvert contenant } l \text{ (} ]l - \varepsilon; l + \varepsilon[ \text{ pour } \\ \varepsilon > 0 \text{ quelconque) contient toutes les valeurs } f(x) \text{ dès que } x \text{ est assez grand :} \\ \\ \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \ / \ \forall x > A, \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon. \end{array} \right)$$

Soit  $J$  un intervalle ouvert quelconque contenant  $l$  :

- Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ , il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $x \geq M$ ,  $g(x) \in J$ ;
- De même  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ , donc il existe  $M' > 0$  tel que, pour tout  $x \geq M'$ ,  $h(x) \in J$ ;

Ainsi, pour tout  $x \geq M$  et  $x \geq M'$ , c'est-à-dire  $x \geq \max(M, M')$ ,  $g(x) \in J$  et  $h(x) \in J$ .

Comme de plus,  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , on en déduit que pour tout  $x \geq \max(M, M')$ ,  $f(x) \in J$ , c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

**Corollaire** • Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que, pour tout  $x \in [A; +\infty[$ ,  $f(x) \geq g(x)$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

• Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que, pour tout  $x \in [A; +\infty[$ ,  $f(x) \leq g(x)$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

**Exercice 12** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par l'expression :  $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Donner un encadrement, pour  $x \neq 0$  de  $f(x)$ , et en déduire la limite en 0 de  $f$ .

La fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 13** Soit la fonction  $E$  définie par : si  $x \in [n; n+1[$ , où  $n$  est un entier, alors  $E(x) = n$ .

Représenter graphiquement la fonction  $E$ . Cette fonction est-elle continue ?

**Exercice 14** Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par l'expression :  $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ .

La fonction  $g$  existe-t-elle en 0 ?

Tracer la courbe représentative de la fonction  $g$  sur une calculatrice. Quelle valeur devrait-on donner à  $g(0)$  pour que la fonction  $g$  soit continue sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 15** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x}{2 - \cos(x)}$ .

1. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos(x)} \leq 1$ .
2. En déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

**Exercice 16** Soit  $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . Démontrer que  $g$  a pour limite 0 en 0.

**Exercice 17** (17 p81)  $f$  et  $g$  sont définies sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $g(x) = \sqrt{x+1}$ .

Dans un repère orthonormal, on désigne par  $M$  et  $N$  les points d'abscisse  $x \geq 0$  situés respectivement sur  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

On pose  $h(x) = MN$ .

1. Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ .
2. Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $0 \leq h(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .
3. En déduire la limite de la fonction  $h$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
4. Trouver un réel  $x_0$  tel que, pour tout réel  $x \geq x_0$ ,  $MN \leq 0,05$ .

**Théorème** Théorème des gendarmes pour les suites

Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites telles que,

$$\text{pour tout entier } n, \quad v_n \leq u_n \leq w_n.$$

Si de plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

**Corollaire** Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \geq v_n$ .

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .

### 3) Principe de récurrence

Ex : Montrer que, pour tout  $n \geq 10$ ,  $2^n \geq 100n$ .

Pour commencer, on peut déjà vérifier cette inégalité pour  $n = 10$  :  $2^{10} = 1024 \geq 100 \times 10 = 1000$ .

Pour  $n = 11$ , on peut soit faire le calcul complet, soit remarquer que  $2^{11} = 2^{10} \times 2$ , et donc, comme  $2^{10} \geq 100 \times 10$  d'après le calcul précédent,  $2^{11} = 2^{10} \times 2 \geq (100 \times 10) \times 2 = 100 \times 20 \geq 100 \times 11$

Ainsi cette inégalité est aussi vraie pour  $n = 11$ .

Pour traiter le problème d'une manière plus général que précédemment, on peut remarquer que, si l'inégalité  $2^n \geq 100n$  est vraie pour un certain entier  $n$ ,

$$\text{alors } 2^{n+1} = 2^n \times 2 \geq (100n) \times 2 = 100n + 100n \geq 100n + 100 = 100(n+1).$$

Ainsi, si cette inégalité est vraie pour un certain entier  $n$ , elle est aussi vraie pour l'entier  $n+1$  suivant.

Or, on a vu que l'inégalité est vraie pour  $n = 10$ , elle est donc aussi vraie pour  $n+1 = 11$ , puis pour  $n = 12$ ,  $n = 13$ , ...

On a finalement bien montré que, pour tout entier  $n \geq 10$ ,  $2^n \geq 100n$ .

Ce raisonnement s'appelle un raisonnement par récurrence.

**Principe du raisonnement par récurrence** Soit  $P(n)$  une proposition qui dépend d'un entier naturel  $n$ . Pour démontrer que  $P(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ , il suffit de :

1. **Initialisation** : vérifier que  $P(n_0)$  est vraie ;
2. **Hérédité de la propriété** : montrer que, si on suppose que  $P(n)$  est vraie pour un certain entier  $n$  (**hypothèse de récurrence**), alors  $P(n+1)$  est encore vraie.

**Exercice 18** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$ .  
Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$ .

La proposition que l'on souhaite démontrer est ici  $P(n)$  : " $0 < u_n < 3$ ".

Initialisation : Pour  $n = 1$ ,  $u_1 = \sqrt{5} \simeq 2, 2 < 3$ , donc  $P(1)$  est vraie.

Hérédité : Hypothèse de récurrence : supposons que pour un entier  $n \geq 1$ ,  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $0 < u_n < 3$ .

Alors,  $5 < u_n + 5 < 8$ , et donc,  $\sqrt{5} < \sqrt{u_n + 5} < \sqrt{8}$  car la fonction racine carré est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

On en déduit que, comme  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$ ,  $0 < \sqrt{5} < u_{n+1} < \sqrt{8} < 3$ , et donc que  $P(n+1)$  est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on vient de démontrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $0 < u_n < 3$ .

**Exercice 19** Soit la suite  $v$  définie par  $v_0 = 2$ , puis pour tout entier  $n$ ,  $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$ .

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$ .

**Exercice 20**

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = [1 + 2 + 3 + \dots + n]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

**Exercice 21** Soit  $n$  un entier naturel non nul, et  $S_n$  la somme :

$$S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $S_n = \frac{n}{n+1}$

2. a) Vérifier que  $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

b) Retrouver alors le résultat du 1. par une autre méthode.

**Exercice 22** Soit  $a$  un réel strictement positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $(1+a)^n \geq 1+na$ .

**Exercice 23** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 3$ , et pour tout entier  $n$  par  $u_{n+1} = 2(u_n - 1)$ .

Calculer les premiers termes de cette suite, et conjecturer une expression de  $u_n$ .

Démontrer alors cette conjecture.

**Exercice 24** Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 5$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$ .

Démontrer que cette suite est monotone.

## 4) Suites monotones

### Définition Suites bornées

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est bornée lorsque qu'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que, pour tout entier  $n$ ,  $m \leq u_n \leq M$ .

$(u_n)$  est minorée par  $m$  (ou  $m$  est un minorant de  $(u_n)$ ), et  $(u_n)$  est majorée par  $M$  (ou  $M$  est un majorant de  $(u_n)$ ),

Ex : •  $(u_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par  $u_n = 3 \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 2$ , alors  $(u_n)$  est bornée :  $\forall n \geq 1, -1 \leq u_n \leq 5$ .

•  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{3}{2+n}$  est bornée, car,  $\forall n \geq 0, 0 \leq v_n \leq \frac{3}{2}$

**Théorème** *Toute suite monotone et bornée est convergente :*

- *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
- *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Remarque : Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge, mais ne fournit aucun moyen pour déterminer cette limite.

Ex : La suite  $u$  de l'exercice précédent définie  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$  est décroissante.

De plus, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \geq 0$ , c'est-à-dire que  $u_n$  est minorée par 0. On en déduit que la suite  $u$  est convergente vers une limite  $l \geq 0$ .

## 5) Point fixe

### Théorème Point fixe

*Si une suite est définie par une relation de récurrence du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ , alors, si elle converge vers un réel  $l$ , on a  $f(l) = l$ .*

*$l$  s'appelle un point fixe pour la fonction  $f$ .*

**Exercice 25** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$ .

- 1) Montrer que cette suite est croissante.
- 2) Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$ . En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$ .
- 3) Déterminer la limite  $l$  de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 26** (24 p219) Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier  $n$ , par  $u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$ .

1. a) Dans un repère orthonormal (unité graphique 4cm), tracer la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentant la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par l'expression  $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$ .  
b) Placer sur l'axe des abscisses, et sans effectuer aucun calcul, les termes  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$ .  
c) Quelle conjecture peut-on faire sur la suite  $u$ .
2. a) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq u_n \leq 3$ .  
b) Démontrer que la suite  $u$  est croissante, et en déduire qu'elle converge.  
c) Déterminer alors la limite de la suite  $u$ .

**Exercice 27** (27 p 219) Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$ .

**1<sup>ère</sup> méthode** a) vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 5 - \frac{16}{u_n + 3}$ .

b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [1; 2]$ .

c) Etablir la relation  $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$ , et en déduire le sens de variation de  $u$ .

d) Démontrer que  $u$  converge et déterminer sa limite  $l$ .

**2<sup>ème</sup> méthode** On considère la suite  $v$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ .

a) Prouver que  $v$  est une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{4}$ .

b) Exprimer pour tout  $n$ ,  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c) En déduire la convergence de  $u$  et sa limite.

## 6) Suites adjacentes

**Définition** Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites adjacentes lorsque :

- $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

**Théorème** Suites adjacentes

Deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  adjacentes sont convergentes et ont la même limite  $l$ .

De plus, si  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante, alors pour tout  $n$ ,  $u_n \leq l \leq v_n$ .

Démonstration :

• On commence par démontrer que, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \leq v_n$ .

Soit  $w_n = u_n - v_n$ . Si pour tout entier  $n$ ,  $w_n \leq 0$ , alors le résultat est vrai.

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un entier  $p$  tel que  $w_p > 0$ .

La suite  $(w_n)$  est croissante, en effet :

$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$ , avec  $u_{n+1} \geq u_n$  et  $v_{n+1} \leq v_n$ , donc  $-v_{n+1} \geq -v_n$ , et donc

$w_{n+1} = u_{n+1} + (-v_{n+1}) \geq u_n + (-v_n) = w_n$ .

Comme les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes, on sait de plus que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ .

Cela signifie que pour tout  $\varepsilon > 0$  (aussi petit que souhaité), l'intervalle  $] -\varepsilon; \varepsilon[$  contient tous les termes  $w_n$  dès que  $n$  est choisi assez grand.

En particulier, pour  $n$  choisi assez grand, tous les termes  $w_n$  sont dans l'intervalle  $] -w_p; w_p[$  (en choisissant  $\varepsilon = w_p$ , car  $w_p > 0$ ).

En d'autres termes, pour  $n$  choisi suffisamment grand, on doit avoir  $-w_p < w_n < w_p$ , ce qui est contradictoire avec le fait que  $(w_n)$  est croissante, donc que  $w_n \geq w_p$  pour  $n > p$ .

Il est ainsi impossible que  $w_p > 0$ , et donc, on a bien, pour tout entier  $n$ ,  $w_n \leq 0$ , c'est-à-dire  $u_n \leq v_n$ .

• Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent.

Comme la suite  $(u_n)$  est croissante, et  $(v_n)$  décroissante, on a donc,  $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq v_n$ , donc la suite  $(v_n)$  est minorée par  $u_0$ . Comme elle est de plus décroissante, on en conclut qu'elle converge vers une limite  $l$ .

De même, comme  $(v_n)$  est décroissante, on a donc,  $u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq v_{n-2} \leq \dots \leq v_1 \leq v_0$ , donc la suite  $(u_n)$  est majorée par  $v_0$ , et comme elle est croissante, on sait donc qu'elle converge vers une limite  $l'$ .

- Les deux limites sont égales :  $l = l'$ .

En effet, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = l - l' = 0$ , et ainsi  $l = l'$  : les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite.

Finalement, comme  $(u_n)$  est croissante, on a pour tout entier  $n$ ,  $u_n \leq l$ , et de même, comme  $(v_n)$  est décroissante, on a  $l \leq v_n$ , d'où l'inégalité, pour tout entier  $n$ ,  $u_n \leq l \leq v_n$ .

**Exercice 28** Soit  $u$  et  $v$  les suites définies pour tout entier  $n \geq 1$  par :  $u_n = 1 - \frac{1}{n}$  et  $v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Montrer que  $u$  et  $v$  sont adjacentes.

**Exercice 29** Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^3} \quad \text{et,} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes, et en déduire qu'elles convergent vers une même limite.

Donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près cette limite.

**Exercice 30** (29 p 220) Soit  $u$  et  $v$  les suites définies pour tout  $n \geq 1$  par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et,} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

où,  $n!$  est "factorielle  $n$ ", et est le nombre  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 2 \times 1$  (par exemple,  $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ). Par convention, on pose  $0! = 1$ .

- Montrer que les suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes, et en déduire qu'elles convergent vers une même limite  $l$ .
- Donner des valeurs approchées de  $u_{10}$  et  $v_{10}$ , et en déduire un encadrement de  $l$ .