BACCALAUREAT BLANC

2020

MATHEMATIQUES

– SERIE S –

Durée de l'épreuve : 4 heures

ENSEIGNEMENTS OBLIGATOIRE & SPECIALITE

L'utilisation d'une calculatrice de poche est autorisée

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Exercice 1 (5 points) *Commun à tous les candidats*

Partie A. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right) z - 2i\sqrt{2}$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

   b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

   c) Écrire ces solutions sous forme exponentielle.

Partie B. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 1 - i, \quad z_J = i\sqrt{2} \quad \text{et } z_K = e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4. Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = -1 - i$ et $z_D = -1 + i$.
   Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (5 points) *Commun à tous les candidats*

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g. Préciser les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.
La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe. Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. a) Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = \dfrac{e^x(2-x) - 1}{(e^x - x)^2}$

   b) En déduire que f est croissante sur $[0; 1]$.

2. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.

3. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

   a) Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

   b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0; 1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Construire sur l'axe des abscisses du graphique en annexe les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.

2. Montrer que pour tout entier n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On admet que la limite l de la suite (u_n) vérifie la relation $l = f(l)$.
   Déterminer alors la limite de (u_n).

Exercice 3 (5 points) *Commun à tous les candidats*

Deux éleveurs produisent une race d'oiseaux d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les oiseaux du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
- pour les oiseaux du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les oiseaux, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

Par la suite, on note les événements :

E : "l'oiseau provient du premier élevage",
M : "l'oiseau n'a pas survécu",
R : "l'oiseau est devenu rouge"
G : "l'oiseau est devenu gris.

1. Un enfant achète un oiseau le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.
   a) Décrire la situation par un arbre de probabilité pondéré.
   b) Montrer que la probabilité que l'oiseau soit toujours vivant un mois plus tard est de $0,92$.
   c) Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard l'oiseau soit rouge.
   d) Sachant que l'oiseau est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 oiseaux de deux mois.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'oiseaux encore en vie un mois plus tard.
   Justifier que la loi de probabilité suivie par X est une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.
   En déduire la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois oiseaux soient en vie. On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. L'animalerie décide de garder les oiseaux jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si l'oiseau est rouge, $0,25$ euro s'il est gris et perd $0,10$ euro s'il ne survit pas.

   Soit Y la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par oiseau acheté.
   Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique, arrondie au centime.

4. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un enfant achète au hasard et de façon indépendante n oiseaux à l'âge de deux mois. On note p_n la probabilité qu'un mois plus tard, au moins un oiseau soit gris.
   a) Exprimer p_n en fonction de n.
   b) Déterminer le nombre minimal d'oiseaux que l'enfant doit acheter afin que la probabilité d'avoir au moins un oiseau gris soit supérieur à 99%.

Exercice 4 (5 points) ***Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	— Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

   b) Que permet de calculer cet algorithme ?

   c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

   b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

   b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

   d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

Exercice 4 (5 points) *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Dans cette exercice, on cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$(E_n) : 7\,x^2 + y^2 = 2^n$$

où $n \in \mathbb{N}$, dont les solutions sont les couples (x, y) d'entiers vérifiant l'égalité.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

1. Résoudre $(E_0) : 7\,x^2 + y^2 = 1$, $(E_1) : 7\,x^2 + y^2 = 2$ et $(E_2) : 7\,x^2 + y^2 = 4$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Montrer que si (x, y) est une solution de (E_n) alors x et y ont même parité.
   Indication : on pourra utiliser une réduction modulo 2.

3. Montrer que si n est impair et si (x, y) est une solution de (E_n) alors ni x, ni y ne sont divisibles par 3.

4. Montrer que si n est pair, alors (E_n) admet au moins une solution.

5. Montrer que si (x, y) est une solution de (E_6) alors $-3 \leqslant x \leqslant 3$ puis résoudre (E_6).

6. Montrer qu'une solution de (E_n) permet de trouver une solution de (E_{n+2}).

Partie B

On pose le système $(S) \left\{ \begin{array}{rcrcl} 7\,x^2 & + & y^2 & = & 2^4 \\ 13\,x^2 & + & 2\,y^2 & = & 31 \end{array} \right.$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$.

On cherche à résoudre le système (S) dans $\mathbb{Z}$.

1. Exprimer le système (S) comme une équation matricielle à l'aide de la matrice A.

2. Calculer $A^2 - 9\,A$.

3. En déduire l'inverse de A.

4. Retrouver la matrice inverse de A au moyen d'une formule d'inversion connue pour les matrices d'ordre 2.

5. À l'aide de A^{-1}, déterminer les solutions de (S).

Annexe à rendre avec la copie

Nom **prénom**