Devoir de mathématiques

$T^{\text{ale}}S$

Exercice 1 *(Concours ESIEE, mai 2009)*

Sachant que chacune des assertions suivantes est vraie :

1. Si le malfaiteur n'est pas venu en voiture alors le témoin s'est trompé.
2. Si le malfaiteur a un complice, alors il est venu en voiture.
3. Soit le malfaiteur n'avait pas de complice et n'avait pas la clé soit le malfaiteur avait un complice et avait la clé.

Si le malfaiteur avait la clé alors nécessairement :

(A) le malfaiteur est venu en voiture ;

(B) le témoin s'est trompé.

Si le malfaiteur n'avait pas la clé alors nécessairement :

(C) le malfaiteur n'avait pas de complice ;

(D) le malfaiteur n'est pas venu en voiture ;

(E) le témoin s'est trompé.

Exercice 2 *(Baccalauréat France métropolitaine, juin 2009, 4 points)*

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4$
   On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.
   a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
      Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$.
   c. Etudier la convergence de la suite (u_n).
2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1 \ .$$

Le tableau suivant donne les premiers termes de cette suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

   a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
   b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
      Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

Exercice 3

Partie I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique que l'on notera α. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Etudier les limites de f aux bornes de ses intervalles de définition.
   En déduire l'existence de deux asymptotes verticales dont on donnera les équations.
2. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$.
5. Justifier l'existence d'une asymptote oblique Δ à $\mathcal{C}_f$.
6. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
7. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à Δ.