Devoir de mathématiques $T^{\text{ale}}S$

Exercice 1 *(Baccalauréat France métropolitaine, Septembre 2007, 5 points)*

Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6},\ z_2 = 2 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.
   On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z. Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).
5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z^{2\,007}$.

Exercice 2 *(D'après Baccalauréat France métropolitaine, septembre 2006)*

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $\{O; \vec{u}, \vec{v}\}$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, où x, x', y, y' sont des nombres réels.
On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{Re}(z'\overline{z}) = 0$.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $\mathrm{Im}(z'\overline{z}) = 0$.

Exercice 3 *(Baccalauréat Antilles-Guyane, Juin 2000, 5 points)*

1. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

   (a) Calculer $P(-\,1)$.

   (b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :
   $$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b).$$

   (c) Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$. (Unité graphique : 2 cm.) On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives
   $$z_{\mathrm{A}} = -1,\ z_{\mathrm{B}} = 2 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_{\mathrm{C}} = 2 - \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{G}} = 3.$$

   (a) Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.

   (b) Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

   (c) Calculer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{C}}}$. En déduire la nature du triangle GAC.
3. Soit (D) l'ensemble des points M du plan tels que :
   $$\left(-\ \overrightarrow{M\mathrm{A}} + 2\overrightarrow{M\mathrm{B}} + 2\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{CG}} = +12 \ \ (1)$$

   (a) Montrer que G est le barycentre du système de points pondérés
   $$\{(\mathrm{A},\ -1)\ ;\ (\mathrm{B},\ 2)\ ;\ (\mathrm{C},\ 2)\}.$$

(b) Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation $\overrightarrow{\mathrm{G}M}.\overrightarrow{\mathrm{CG}} = -4 \quad (2)$.

(c) Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (D).

(d) Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{\mathrm{A}M}.\overrightarrow{\mathrm{GC}} = 0$.

(e) En déduire l'ensemble (D) et le tracer.

Exercice 4 *(Baccalauréat Nouvelle-Calédonie, Novembre 2004, 5 points)*

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 4 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{array}\right.$$

1. Calculer $u_1,\ v_1,\ u_2$ et v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   (b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).
3. Après avoir étudié le sens de variation de suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à préésent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
   (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).