Devoir de mathématiques

$T^{\text{ale}}S$

Exercice 1

Soit f une fonction continue et définie sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans l'intervalle $[0;1]$.
Démontrer que f admet (au moins) un point fixe dans $[0;1]$.

Exercice 2

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$.

1. a) Calculer la dérivée de f' de la fonction f.
   b) Calculer la dérivée seconde f'' de f.

2. a) Déterminer les variations de la fonction f'.
   b) Dresser le tableau de variation de f'.
   Prouver que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique c et que cette solution appartient à l'intervalle $]-\infty;-1]$.
   c) Donner un encadrement de c d'amplitude 10^{-2}.

3. a) Déterminer le signe de la fonction f', puis dresser le tableau de variation de la fonction f'.
   b) Montrer que $f(c) = \dfrac{3c(4-c)}{4}$
   c) Déterminer le nombre de racines du polynôme f.

Exercice 3

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x} \ .$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On sait que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(0;1)$ et qu'elle admet une tangente parallèle à (Ox) au point d'abscisse 1. On sait aussi que $f'(0) = -6$.

Déterminer les coefficients a, b et c.

Exercice 4

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2 + 2e^{-\frac{x}{2}}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. *Etude de f*
   a) Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $[0;+\infty[$.
   b) Etudier le sens de variation de f'.
   Déterminer la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(0)$.
   c) En déduire l'existence et l'unicité d'un réel α strictement positif pour lequel f' s'annule.
   Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$.
   d) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout x de $[0;+\infty[$.

2) *Comportement de f en $+\infty$*
   a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) On pose, pour tout x de $[0;+\infty[$: $d(x) = f(x) - (x^2 - 2)$.
   Déterminer le signe de $d(x)$ et sa limite lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.

3. *Variations de f*
   a) Donner le tableau de variations de f.
   b) Donner, en le justifiant, le signe de $f(\alpha)$.

Exercice 5 *(Baccalauréat Inde, avril 2005)*

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \text{ si et seulement si, } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

   a) Etudier le sens de variation de et la limite de la fonction f.

   b) Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1;+\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.

   c) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.

   d) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9 \ .$$

3. a) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

   b) Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16}\, u_{16} \ .$$

   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ , et } f(0) = 0.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité : 5 cm).

1. Démontrer que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.
2. Démontrer que pour $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.
3. Dresser le tableau de variation de f, et tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.