Devoir de mathématiques

Exercice 1 *(Baccalauréat Amérique du nord, juin 2005)*

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;2]$.
   Montrer que si $x \in [1;2]$ alors $f(x) \in [1;2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et pour tout entier } n, u_{n+1} = f(u_n); \\ v_0 = 2 \text{ et pour tout entier } n, v_{n+1} = f(v_n). \end{cases}$

   a. Tracer dans un repère orthonormal la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$. Construire sur l'axe des abscisses de ce graphique les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents les traits de construction.

   A partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

   b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
   Pour tout entier n, $1 \leq v_n \leq 2$.
   Pour tout entier n, $v_{n+1} \leq v_n$.

   On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
   Pour tout entier n, $1 \leq u_n \leq 2$.
   Pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1}$.

   c. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geq 0$ et que : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$

   d. Montrer que pour tout entier n, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

   e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
   Déterminer alors la valeur exacte de α.

Exercice 2

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 12x - 16$.

   a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

   b) Dresser le tableau de variations de g.

   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[3;5]$. Déterminer une valeur approchée de α à $0,1$ près par excès.

   d) Déduire de ce qui précède la signe de $g(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-4}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

   a) Déterminer la limite de f en 2 et en $+\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes.

   b) On admet que, pour tout $x > 2$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-4)^2}$. Dresser alors le tableau de variation de f.

   c) Montrer que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 *(D'après baccalauréat Polynésie française, septembre 2006)*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$$

   Dresser le tableau de variations de f.

2. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On définit la fonction v sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = u\left(\frac{1}{x}\right)$.

   a) On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a; b]$ (où $0 < a < b$).
   Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\frac{1}{b}; \frac{1}{a}\right]$.

   b) On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0; +\infty[$, où f est la fonction définie à la question 1.
   Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice 4 *(D'après baccalauréat C, Aix-Marseille 1989)*

On appelle f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1) Etudier les limites de f en 0 et $+\infty$.
   Préciser les éventuelles asymptotes (on pourra étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$).

2) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2x^2 - 3}{2x^2\sqrt{3}}$. En déduire les variations de f.

3) Soit m un réel, et soit Δ la droite d'équation $y = m$. Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et Δ.

4) Pour $m > \sqrt{2}$, on appelle A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et Δ, et I le milieu de $[A; B]$.
   Donner, en fonction de m, les coordonnées de I.
   Montrer que quand m est dans l'intervalle $]\sqrt{2}; +\infty[$, I est sur la droite d'équation $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$.

5) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.