Réviser, approfondir son année de terminale

et préparer son entrée en prépa (et/ou ailleurs aussi)

7 Exponentielle, ln, suite, intégrales, ... de tout à la fois

Exercice 22 Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.

1. Déterminer le sens de variation de F.
2. Prouver que, pour tout $t>0$, $\dfrac{e^t}{t}>\dfrac{1}{t}$.
   En déduire, pour $x\geqslant 1$, le signe de $\varphi(x)=F(x)-\ln(x)$.
3. Déduire de cette étude le comportement de F en $+\infty$.

Exercice 23 On s'intéresse à la valeur de la limite de la somme

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}\end{aligned}$$

L'objectif est de montrer que cette somme converge, lorsque $n\to+\infty$, et de déterminer cette limite.

Remarque : cette limite se note alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

et s'appelle une ***série****. Il s'agit ici en plus d'une série courante : la* ***série harmonique alternée***

1. Soit $x\neq -1$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k=\frac{1}{1+x}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+k}=\ln(2)+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

3. Montrer que

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx\leqslant\frac{1}{n+2}$$

4. Conclure que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+k}=\ln(2)$$

Exercice 24 Pour tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=\frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal.

1. Étude de la fonction f_1

   a) Vérifier que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7e^{-x}}$.

   b) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

   c) Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   d) Démontrer que, pour tout réel x, on a $0 < f_1(x) < 4$.

   e) Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_1$.

   f) Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ et en déduire la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[0; \ln 7]$.

2. Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

   a) Démontrer que pour tout entier n non nul, le point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$.

   b) Démontrer que, pour tout entier n non nul, la courbe $\mathcal{C}_n$ et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection I_n dont on précisera l'abscisse.

   c) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point I_n.

   d) Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

   $$u_n = \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)dx$$

   Montrer que cette suite est constante.