Nombres et plan complexes
Les exercices fondamentaux à connaître

Y. Morel

Version en ligne et interactive :
http://xymaths.free.fr/Lycee/TS/Exercices-Corriges-Complexes.php

Table des matières

1 Formes algébrique, trigonométrique et exponentielle

Exercice 1 : Ecrire sous forme algégbrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (1+2i)(-2+i)$

   Solution:$z_1 = (1+2i)(-2+i) = -2+i-4i+2i^2 = -2-3i-2 = -4-3i$

2. $z_2 = (1+2i)(1-2i)$

   Solution : $z_2 = (1+2i)(1-2i) = |1+2i|^2$ (car $z\,\overline{z} = |z|^2$)
   soit, $z_2 = 1^2+2^2 = 5$

3. $z_3 = \dfrac{2}{1+i}$

   Solution : $z_3 = \dfrac{2}{1+i} = \dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2-2i}{2} = \dfrac{2}{2} - \dfrac{2i}{2} = 1-i$

4. $z_4 = \dfrac{2i}{3-2i}$

   <u>Solution :</u> $z_4 = \dfrac{2i}{3-2i} = \dfrac{2i(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{6i-4}{13} = -\dfrac{4}{13} + \dfrac{6}{13}i$

5. $z_5 = \dfrac{2+i}{2-i}$

   <u>Solution :</u> $z_5 = \dfrac{2+i}{2-i} = \dfrac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{3+4i}{5} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$

6. $z_6 = \dfrac{2+3i}{-2+i}$

   <u>Solution :</u> $z_6 = \dfrac{2+3i}{-2+i} = \dfrac{(2+3i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \dfrac{-1-8i}{5} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{8}{5}i$

7. $z_7 = \dfrac{2i}{(1-i)(1+2i)}$

   <u>Solution :</u>
   $$\begin{aligned} z_7 &= \frac{2i}{(1-i)(1+2i)} = \frac{2i(1+i)(1-2i)}{(1-i)(1+i)(1+2i)(1-2i)} \\ &= \frac{2i(3-i)}{2\times 5} = \frac{2+6i}{10} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

8. $z_8 = 2e^{i\pi}$

   <u>Solution :</u> $z_8 = 2e^{i\pi} = 2\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = 2\left(-1 + i \times 0\right) = -2$

9. $z_9 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

   <u>Solution :</u> $z_9 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

10. $z_{10} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$

    <u>Solution :</u> $z_{10} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\, e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

    d'où, $z_{10} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$

<u>**Exercice 2 :**</u> Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (1+3i)(5-i)$

   <u>Solution :</u> Pour déterminer les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, on l'écrit sous forme algébrique :
   $z_1 = 5 - i + 15i - 3i^2 = 5 + 14i + 3 = 8 + 14i$.
   La partie réelle de z_1 est donc $\Re e(z_1) = 8$, et sa partie imaginaire $\Im m(z_1) = 14$.

2. $z_2 = (2+i)^2$

   Solution : Pour déterminer les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, on l'écrit sous forme algébrique :
   $z_2 = 2^2 + 4i + i^2 = 2^2 + 4i - i = 3 + 4i$
   La partie réelle de z_2 est donc $\Re e(z_2) = 3$, et sa partie imaginaire $\Im m(z_2) = 4$.

3. $z_3 = \dfrac{1+3i}{4+2i}$

   Solution : Pour déterminer les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, on l'écrit sous forme algébrique :
   $z_2 = \dfrac{(1+3i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \dfrac{10+10i}{20} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$
   La partie réelle de z_3 est donc $\Re e(z_3) = \dfrac{1}{2}$, et sa partie imaginaire $\Im m(z_3) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 : Ecrire les nombres complexes suivants sous formes trigonométrique et exponetielle

1. $z_1 = 1 + i$

   Solution : On calcule le module et un argument de z_1.
   $|z_1| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.
   De plus, si $\theta_1 = \arg(z_1)$, alors $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, d'où $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

   $$\begin{aligned} \text{On a donc,}\quad z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) && \textit{(forme trigonométrique)} \\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} && \textit{(forme exponentielle)} \end{aligned}$$

2. $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

   Solution : On calcule le module et un argument de z_2.
   $|z_2| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$.
   De plus, si $\theta_2 = \arg(z_2)$, alors $\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, d'où $\theta_2 = -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

   $$\begin{aligned} \text{On a donc,}\quad z_2 &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) && \textit{(forme trigonométrique)} \\ &= 2e^{-i\frac{\pi}{6}} && \textit{(forme exponentielle)} \end{aligned}$$

3. $z_3 = \dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$

   Solution : On peut chercher tout d'abord à écrire z_3 sous forme algébrique et procéder comme précédemment.

   On peut aussi directement calculer le module et un argument de z_3 en utilisant lesrègles de calcul sur les modules et argument d'un quotient :

   $|z_3| = \left|\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right| = \dfrac{|1+i|}{|1-i\sqrt{3}|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   De plus, $\theta_3 = \arg(z_3) = \arg\left(\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right) = \arg(1+i) - \arg\left(1-i\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{7\pi}{12}$

   (d'après les calculs des deux premières questions).

   $$\begin{aligned} \text{On a donc,} \quad z_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) && \textit{(forme trigonométrique)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} && \textit{(forme exponentielle)} \end{aligned}$$

2 Résolution d'équations

Exercice 4 : Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que $(1+2i)z + 2 = 3z - 2i$.

Solution : C'est une équation du premier degré dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} (1+2i)z + 2 = 3z - 2i \quad &\Longleftrightarrow \quad (-2+2i)z = -2-2i \\ &\Longleftrightarrow \quad z = \frac{-2-2i}{-2+2i} \\ & = \frac{(-2-2i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} \\ & = \frac{8i}{8} \\ & = i \end{aligned}$$

Exercice 5 : Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que $(1+i)\overline{z} + 2 = -z + i$.

Solution : On revient à des nombres réels en posant $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels que l'on cherche à déterminer.

L'équation s'écrit alors :

$$\begin{aligned}(1+i)(x-iy)+2=-(x+iy)+i &\iff (x+y+2)+i(x-y)=-x+i(-y+1)\\ &\iff (2x+y+2)+i(x-1)=0\\ &\iff \begin{cases}2x+y+2=0\\ x-1=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}2+y+2=0\\ x=1\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}y=-4\\ x=1\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, $z=1-4i$ est la solution de cette équation.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré :

1. $z^2+25=0$

   Solution : L'équation est équivalente à $z^2=-25$, d'où $z=5i$ ou $z=-5i$.

   (Inutile de calculer Δ ici ...)
2. $z^2+8=0$

   Solution : L'équation est équivalente à $z^2=-8$, d'où $z=i\sqrt{8}=i2\sqrt{2}$ ou $z=-i2\sqrt{2}$.

   (Inutile de calculer Δ ici ...)
3. $z^2-z+1=0$

   Solution : Le discriminant de cette équation est : $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$.
   L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :
   $z_1=\dfrac{-(-1)-i\sqrt{3}}{2\times1}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.
4. $z^2-5z+4=0$

   Solution : Le discriminant de cette équation est : $\Delta=(-5)^2-4\times1\times4=9>0$.
   L'équation admet donc deux solutions réelles :
   $z_1=\dfrac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\times1}=\dfrac{5-3}{2}=1$ et $z_2=\dfrac{5+3}{2}=4$.
5. $\dfrac{4}{9}z^2-\dfrac{4}{3}z+1=0$

   Solution : Le discriminant de cette équation est : $\Delta=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2-4\times\dfrac{4}{9}\times1=\dfrac{16}{9}-\dfrac{16}{9}=0$.

L'équation admet donc une unique solution réelle :

$z_0 = \dfrac{-\left(-\dfrac{4}{3}\right)}{2 \times \dfrac{4}{9}} = \dfrac{\dfrac{4}{3}}{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{3}{2}$

6. $2z^2 + 3z + 5 = 0$

   Solution : Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = -31 < 0$.
   L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :
   $z_1 = \dfrac{-3 - i\sqrt{31}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{-3 + i\sqrt{31}}{4}$.

3 Puissance d'un nombre complexe

Exercice 7 :

1. Calculer la forme algébrique de i^2, i^3, i^4, i^{123}, i^{2013}.

   Solution : Par définition même du nombre i, $i^2 = -1$,
   puis, $i^3 = i^2 \times i = -i$,
   et $i^4 = i^3 \times i = -i \times i = -i^2 = 1$.

   On a donc, pour tout entier n, $i^{4n} = \left(i^4\right)^n = (1)^n = 1$.
   Ainsi, comme $2013 = 4 \times 503 + 1$, $i^{2013} = i^{4\times503+1} = i^{4\times503} \times i^1 = \left(i^4\right)^{503} \times i = 1^{503} \times i = i$

2. Ecrire sous forme algébrique la somme : $S = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2012}$.

   Solution : S est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison i :

$$S = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2012} = \frac{1 - i^{2013}}{1 - i} = \frac{1 - i}{1 - i} = 1$$

Exercice 8 : On pose $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$. Déterminer la forme algébrique de j^{39}.

Solution : La forme la plus adaptée pour calculer la puissance d'un nombre complexe est la forme exponentielle, car on peut alors utiliser simplement les règles de calcul de l'exponentielle, en particulier $\left(e^a\right)^b = e^{ab}$.

On calcule donc le module et un argument du nombre complexe j :

- $|j| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$

- $\arg(j) = \theta$ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{1} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ d'où, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

On a donc, $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$, et donc, $j^{39} = \left(e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)^{39} = e^{2i\frac{\pi}{3}\times 39} = e^{2i\pi\times 13} = e^{26i\pi} = e^{0i}$, car $26\pi = 13 \times 2\pi \equiv 0\ [2\pi]$.

Ainsi, $j^{39} = e^0 = 1$.

4 Détermination d'ensembles de points dans le plan complexe

Exercice 9 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$.

Solution : Géométriquement, un module est une distance : $AB = |z_B - z_A|$.
Ici, si on définit les points A et B du plan complexe d'affixes $z_A = i$ et $z_B = -1$, alors $|z - i| = |z + 1| \iff |z - z_A| = |z - z_B| \iff AM = BM$.
L'ensemble des points M est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 10 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$|z - 1 + 2i| = |-3 + 4i|\ .$$

Solution : On a $|-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.
Soit de plus le point A d'affixe $z_A = 1 - 2i$, alors on cherche l'ensemble des points M tels que

$$|z - 1 + 2i| = |-3 + 4i| \iff |z - z_A| = 5 \iff AM = 5$$

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre A et de rayon 5.

Exercice 11 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $Z = z^2 + \overline{z}$ soit réel.

Solution :
On pose $z = x + iy$, avec x et y des nombres réels.
Alors, $Z = z^2 + \overline{z} = (x + iy)^2 + (x - iy) = x^2 + x - y^2 + i(2xy - y) = x^2 + x - y^2 + iy(2x - 1)$.
Ainsi, Z est réel si et seulement si

$$\begin{aligned} \Im m(Z) = 0 \iff y(2x - 1) = 0 \quad &\iff \Big(y = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0\Big) \\ &\iff y = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble E est la réunion des droites d'équation $y = 0$ (axe des abscisses, ou axe des réels) et $x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 12 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $Z = (1+z)(i+\overline{z})$ soit réel.

Solution :
On pose $Z = x + iy$, avec x et y des nombres réels.
Alors, $Z = (1+z)(i+\overline{z}) = (1+(x+iy))\,(i+(x-iy)) = \Big((1+x)+iy\Big)\Big(x+i(1-y)\Big)$
soit, $Z = \Big(x(1+x)-y(1+y)\Big)+i\Big(xy+(1+x)(1-y)\Big) = \Big(x(1+x)-y(1+y)\Big)+i\Big(1+x-y\Big)$.
Ainsi, Z est réel si et seulement si $\Im m(Z) = 0 \iff 1+x-y=0 \iff y = x+1$.

L'ensemble E des points est donc la droite d'équation $y = x+1$.

5 Exercices complets type Bac

Exercice 13 : Le plan complexe est muni d'un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère la suite de points (M_n) et la suite des affixes (z_n) définies par :

$$z_0 = 8 \text{ et, pour tout entier } n,\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$$

1. Calculer le module et un argument du nombre complexe $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$. L'écrire sous forme trigonométrique.

   Solution : $\left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right| = \dfrac{|1+i\sqrt{3}|}{|4|} = \dfrac{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

   Soit $\theta = \arg\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)$,

   alors, $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ d'où $\theta = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

   Ainsi, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

2. Calculer z_1, z_2 et z_3 et vérifier que z_3 est réel.

   Solution : $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} z_0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4} 8 = 2\left(1+i\sqrt{3}\right)$

$z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}2(1+i\sqrt{3}) = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{2} = \dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1+i\sqrt{3}$

$z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}(-1+i\sqrt{3}) = \dfrac{-4}{4} = -1$ et on a donc bien, $z_3 \in \mathbb{R}$.

3. Pour tout nombre entier naturel n :

   a. calculer le rapport $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$;

   Solution :

$$\begin{aligned}
\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} &= \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n - z_n}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n} = \frac{z_n\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}-1\right)}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n} = \frac{\frac{-3+i\sqrt{3}}{4}}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}} \\
&= \frac{-3+i\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \\
&= \frac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{4i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

   b. en déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que $|z_{n+1}-z_n| = \sqrt{3}|z_{n+1}|$.

   Solution : On a $\left(\overrightarrow{OM_{n+1}};\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}-0}\right)$, soit, d'après le calcul précédent, $\left(\overrightarrow{OM_{n+1}};\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right) = \arg\left(i\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *(car $i\sqrt{3}$ est un nombre imaginaire pur).*
   Ainsi, le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle en M_{n+1}.

   De plus, $z_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n \iff z_n = \dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}z_{n+1}$, et donc,

$$\begin{aligned}
|z_{n+1}-z_n| &= \left|z_{n+1} - \frac{4}{1+i\sqrt{3}}z_{n+1}\right| = \left|z_{n+1}\left(1-\frac{4}{1+i\sqrt{3}}\right)\right| \\
&= |z_{n+1}| \times \left|1-\frac{4}{1+i\sqrt{3}}\right| = |z_{n+1}| \times \left|\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right| \\
&= |z_{n+1}| \times \frac{|-3+i\sqrt{3}|}{|1+i\sqrt{3}|} = |z_{n+1}| \times \frac{\sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2}}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}} \\
&= |z_{n+1}|\frac{\sqrt{12}}{2} = |z_{n+1}|\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}|z_{n+1}|
\end{aligned}$$

Exercice 14 : Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note f la fonction qui, à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = f(z) = \frac{-iz - 2}{z + 1}\ .$$

On se propose de rechercher, de deux manières différentes, l'ensemble (E) des points M tels que M' appartient à l'axe des abscisses, privé de O.

A - Méthode analytique x et y désignent deux nombres réels tous les deux non nuls.

1. Développer l'expression $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2$.

   Solution : $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = x^2 + x + y^2 - 2y + \frac{5}{4}$.

2. On pose $z = x + iy$. Exprimer $\Im m(z')$ en fonction de x et y.

   Solution : $z' = \frac{-iz-2}{z+1} = \frac{-i(x+iy)-2}{x+iy+1} = \frac{(y-2)-ix}{(x+1)+iy}$.
   Pour déterminer $\Im m(z')$, on exprime z' sous forme algébrique :

$$z' = \frac{[(y-2)-ix]\,[(x+1)-iy]}{[(x+1)+iy]\,[(x+1)-iy]} = \frac{\Big((y-2)(x+1) - xy\Big) - i\Big(x(x+1) + y(y-2)\Big)}{(x+1)^2 + y^2}$$

   Ainsi,

$$\Im m(z') = -\frac{x(x+1) + y(y-2)}{(x+1)^2 + y^2}$$

3. En déduire l'ensemble (E) des points M lorsque M' appartient à l'axe des abscisses, privé de O.

   Solution : L'ensemble (E) est l'ensemble des points M tels que M' est sur l'axe des abscisses, privé de O, c'est-à-dire tels que $\Im m(z') = 0$.

   D'après la question précédente, on a donc,

$$\Im m(z') = 0 \iff -\frac{x(x+1) + y(y-2)}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \iff x(x+1) + y(y-2) = 0$$

   Or, d'après la question 1., $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = x^2 + x + y^2 - 2y + \frac{5}{4} = x(x+1) + y(y-2) + \frac{5}{4}$, et ainsi,

$$x(x+1) + y(y-2) = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 - \frac{5}{4} = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$$

L'ensemble (E) est donc le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$ et de rayon $R=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

B - Méthode géométrique

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$,

$$z' = -i\omega \text{ , où } \omega = \frac{z-2i}{z+1} \text{ .}$$

<u>Solution :</u> $z' = \dfrac{-iz-2}{z+1} = \dfrac{-i\left(z+\dfrac{2}{i}\right)}{z+1}$

or, $\dfrac{2}{i} = \dfrac{2\times(-i)}{i\times(-i)} = \dfrac{-2i}{1} = -2i$, d'où, $z' = \dfrac{-i\,(z-2i)}{z+1} = -i\dfrac{z-2i}{z+1} = -i\omega$.

2. A et B sont les points d'affixes respectives $2i$ et -1.
Donner une interprétation géométrique d'un argument de ω, lorsque $z \neq 2i$.

<u>Solution :</u> Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2i$ et $z_B = -1$, alors, $\omega = \dfrac{z-z_A}{z-z_B}$, et donc, $\arg(\omega) = \arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)$.

Un argument de ω est donc une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)$.

3. Exprimer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(\omega)$.

<u>Solution :</u> $\arg(z') = \arg(-i\omega) = \arg(-i)+\arg(\omega) = -\dfrac{\pi}{2}+\arg(\omega)$

4. Déduire de ce qui précède l'ensemble (E).

<u>Solution :</u> L'ensemble (E) est l'ensemble des points M tels que M' est sur l'axe des abscisses, privé de O, c'est-à-dire tels que $\arg(z') = \pi\ [\pi]$
(c'est-à-dire $\arg(z') = 0\ [2\pi]$ *ou* $\arg(z') = \pi\ [2\pi]$*).*

Ainsi, on doit avoir $\arg(z') = -\dfrac{\pi}{2}+\arg(\omega) = \pi\ [\pi]$,
soit encore, $\arg(\omega) = \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{3\pi}{2}\ [\pi]$,
c'est-à-dire que le triangle ABM est rectangle en M.

On en déduit que l'ensemble (E) des points M est le cercle de diamètre $[AB]$.

<u>Remarque :</u> le centre de ce cercle est le milieu du diamètre $[AB]$, qui a donc pour affixe $\dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{2i-1}{2} = -\dfrac{1}{2}+i$.

Le rayon du cercle de diamètre $[AB]$ *est* $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{|z_B - z_A|}{2} = \dfrac{|-1-2i|}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
On retrouve ainsi le centre Ω *et le rayon* R *du cercle déterminé dans la partie A.*