

# Probabilités conditionnelles - Arbre pondéré

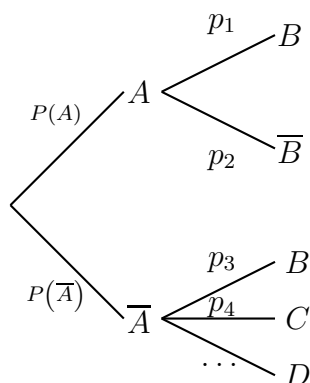
**Exercice 1** Dans un magasin de cycles, 55% des ventes sont des VTT, 30% sont des VTC, et les vélos de course sont tous les autres vélos vendus.

On a constaté de plus que pour 60% des VTT, 35% des VTC et 80% des vélos de course, l'achat est fait par un homme.

On se pose la question : "quelle proportion des vélos vendus est achetée par des hommes?"

- Supposons que 1000 vélos aient ainsi été vendus.
  - Représenter la situation par un arbre pondéré.
  - Calculer les nombres de VTT, VTC et vélos de course achetés par des hommes.
  - Répondre alors à la question principale.
- Reprendre les calculs précédents en utilisant un arbre pondéré utilisant juste les pourcentages des ventes.

## I - Arbre pondéré



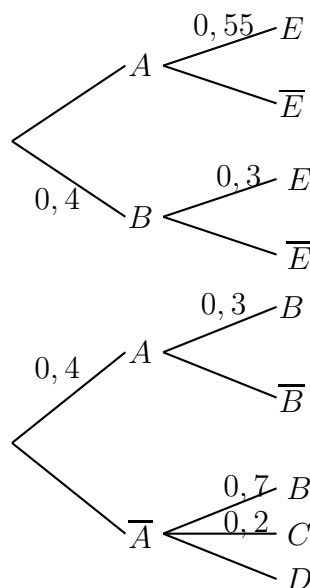
**Règle 1.** La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

**Règle 2.** Un chemin correspond à l'intersection des événements.  
Sa probabilité est le produit des probabilités.

**Règle 3.** La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.

**Exercice 2** Compléter l'arbre pondéré de probabilité ci-contre.

Calculer alors  $P(A \cap E)$ ,  $P(A \cap \bar{E})$  et  $P(E)$ .



**Exercice 3** Calculer, à partir des données de l'arbre ci-contre,  $P(\bar{A})$ ,  $P(C)$ ,  $P(D)$  et  $P(B)$ .

**Exercice 4** Une entreprise fabrique des systèmes d'alarme pour les piscines dans deux ateliers, notés  $S_1$  et  $S_2$ . Dans l'atelier  $S_1$  sont fabriqués chaque jour 300 systèmes d'alarme, et le double dans l'atelier  $S_2$ .

En moyenne, 3% des alarmes de la production de l'atelier  $S_1$  sont défectueuses, et 4% pour l'atelier  $S_2$ .

On note les événements  $S_1$  : "le système d'alarme est fabriqué par l'atelier 1", et  $D$  : "le système d'alarme est défectueux".

- Traduire les données de l'énoncé par des probabilités et représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité  $P(D)$ .

**Exercice 5** Le personnel du secteur de production d'une entreprise est composé de trois catégories : les ingénieurs (8% du personnel), les opérateurs de production (82% du personnel) et les agents de maintenance.

Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 6% des opérateurs de production, et 25% des agents de maintenance.

1. Calculer la proportion de femmes ingénieurs parmi le personnel.
2. Calculer la proportion d'hommes opérateurs de production parmi le personnel.
3. On interroge une personne du personnel au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

## II - Probabilités conditionnelles

**Exercice 6** Une étude dans une grande ville a donné les résultats suivants : 73% des personnes ont un vélo, 19% ont des rollers et 17% possèdent les deux.

On note  $R$  l'événement : "la personne a des rollers" et  $V$  : "la personne a un vélo".

1. On considère dans un premier temps que la population de cette ville est composée de 100 000 personnes. Compléter le tableau :

	$V$	$\bar{V}$	Total
$R$			
$\bar{R}$			
Total			100 000

Reprendre le même tableau avec uniquement des pourcentages ("Total : 100%").

2. On désigne une personne au hasard dans l'annuaire de la ville.
  - a) Déterminer la probabilité que cette personne ait soit un vélo soit des rollers.
  - b) Déterminer la probabilité que cette personne n'ait ni vélo ni roller ?
  - c) Quelle est la probabilité que cette personne ait des rollers mais pas de vélo ?
  - d) La personne contactée affirme tout de suite posséder un vélo. Quelle est la probabilité qu'elle ait alors aussi un roller ?
3. Je travaille dans un magasin de cycle. Un potentiel client entre dans mon magasin en rollers. Quelle est la probabilité qu'il ait déjà un vélo ?

**Définition / propriété.** La probabilité conditionnelle de l'événement  $B$  sachant  $A$ , notée  $P_A(B)$ , est le nombre

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On exprime alors, de manière équivalente, **la propriété de l'intersection** :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

**Exercice 7** Parmi la clientèle d'un fournisseur de télévision par satellite, une enquête montre que 75% des abonnés ont souscrit à l'option "Sport Live", 50% des abonnés ont souscrit à l'option "Cinéma - Séries" et 30% des abonnés ont souscrit aux deux options.

On note les événements  $S$  : "l'abonné a souscrit à l'option Sport Live" et  $C$  : "l'abonné a souscrit à l'option Cinéma - Séries".

1. Donner les valeurs de  $P(S)$ ,  $P(C)$  et  $P(S \cap C)$
2. Compléter le tableau de probabilités :

	$C$	$\bar{C}$	Total
$S$			
$\bar{S}$			
Total			100%

3. Calculer  $P_C(S)$ .
4. Déterminer la probabilité qu'un abonné ait choisi l'option "Cinema - Séries" sachant qu'il a souscrit à l'option "Sport Live".

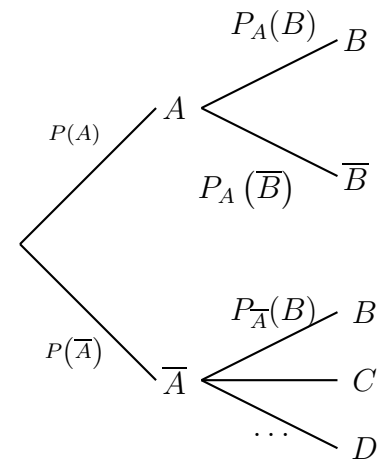
**Exercice 8** Dans un magasin, on a relevé que 15% des clients effectuent leurs achats avec une carte de fidélité ; parmi eux, 80% réalisent toujours des achats d'un montant supérieur à 50 euros.

On considère un client au hasard dans la base de donnée des clients.

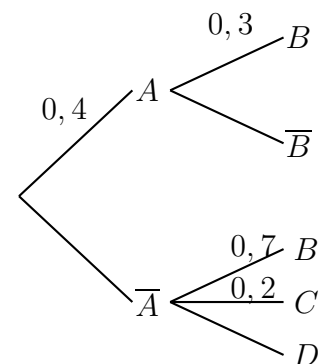
On note  $F$  l'événement "le client effectue ses achats avec une carte de fidélité et  $S$  : "le client réalise des achats d'un montant supérieur à 50 euros".

1. Donner  $P(F)$  et  $P_F(S)$ .
2. Calculer  $P(F \cap S)$  et traduire le résultat par une phrase.

**Remarque :** Dans un arbre pondéré, on a la **règle 4** : la probabilité indiquée sur une branche est une probabilité conditionnelle



**Exercice 9** Calculer, à partir des données de l'arbre ci-contre,  $P(A \cap B)$ ,  $P_{\bar{A}}(D)$  et  $P(B)$ .



**Exercice 10** Dans un établissement scolaire, 20% des élèves déclarent jouer plus de 3 heures par jour sur leur téléphone ; parmi eux, 40% sont des garçons.

On choisit un élève au hasard de cet établissement. On note  $J$  l'événement "l'élève joue plus de 3h/jour", et  $G$  : "l'élève est un garçon".

1. Traduire par des probabilités sur  $J$  et  $G$  les données de l'énoncé, et présenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilité.
2. Calculer  $P(J \cap \overline{G})$ .
3. L'établissement comporte 45% de garçons.  
Déterminer alors, arrondi à  $10^{-2}$  près,  $P_{\overline{G}}(J)$ .

**Exercice 11** Une maladie touche une personne sur 10 dans un pays. Un médecin effectue le dépistage de cette maladie à l'aide d'un test fourni par un laboratoire.

Les caractéristiques, données par le laboratoire, de ce test sont les suivantes :

- lorsque le patient sur lequel on effectue le test est malade, le test est positif dans 90% des cas ;
- lorsque le patient sur lequel on effectue le test n'est pas malade, le test est positif dans un cas sur 100 (*c'est ce qu'on appelle un faux positif*).

On s'intéresse à une personne au hasard dans la population.

On note les événements  $M$  : "la personne est malade" et  $T$  : "le test est positif".

1. Traduire l'énoncé en termes de probabilité et dresser un arbre pondéré de probabilité décrivant la situation.
2. Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade et ait un test positif ?
3. Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population ait un test positif ?
4. Le médecin reçoit un résultat positif pour le test d'un patient. Quelle est la probabilité que ce patient soit malade ?

**Exercice 12** Reprendre l'exercice précédent, pour une maladie touchant non pas une personne sur 10, mais touchant une personne sur 1000 (maladie rare) : mon test est positif, quelle est la probabilité que je sois malade ?

**Exercice 13** Le tableau suivant donne des informations sur les comportements d'achat en ligne dans une population de 90 personnes.

	Achète parfois en ligne	N'achète jamais	Total
Moins de 50 ans	45	9	54
plus de 50 ans	12	24	36
Total	57	33	90

On interroge une de ces personnes au hasard.

On notera  $M$  : "la personne a moins de 50 ans" et  $A$  : "la personne achète parfois en ligne".

1. Quelle est la probabilité que cette personne ait moins de 50 ans ?
2. Quelle est la probabilité que cette personne ait moins de 50 ans et achète parfois en ligne ?
3. Sachant que la personne interrogée a moins de 50 ans, quelle est la probabilité qu'elle achète parfois en ligne ?
4. Sachant que la personne interrogée achète parfois en ligne, quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 50 ans ?

**Exercice 14** Une agence de voyage installe une plateforme téléphonique afin de démarcher des clients et d'accroître ainsi son activité.

Cette entreprise a dans son fichier de clients 50% de familles avec au moins un enfant, 35% de familles sans enfant, et le reste de clients vivant seuls.

On estime que 10% des familles avec au moins un enfant vont se décider pour un séjour avec l'agence de voyages, et que 80% des familles sans enfant ne partiront pas avec l'agence de voyages.

Un employé de cette entreprise tire une fiche client au hasard.

On considère les événements suivants :

$A$  : "la fiche est celle d'une famille avec au moins un enfant"

$B$  : "la fiche est celle d'une personne sans enfant"

$C$  : "la fiche est celle d'une personne vivant seule"

$V$  : "la fiche est celle d'un client qui partira avec l'agence"

1. Reproduire et compléter autant qu'il est possible l'arbre pondéré de probabilités suivant :

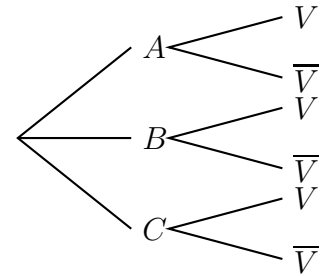
2. Exprimer par une phrase chacun des événements  $A \cap V$  et  $A \cup V$ .

3. a) Calculer la probabilité de l'événement  $A \cap V$ .

b) Calculer la probabilité de l'événement : "La fiche est celle d'une famille sans enfant et elle partira pour séjour avec l'agence".

4. On sait aussi que la probabilité de l'événement  $C \cap V$  est égale à 0,06.

Calculer la probabilité de l'événement : "la fiche est celle d'un client qui partira pour un séjour avec l'agence sachant que c'est un client vivant seul".



### Exercice 15 QCM

Un grand journal a fait réaliser l'année dernière une enquête sur un échantillon représentatif de la population française âgée de 18 à 35 ans, à propos des sources d'information.

Pour chaque personne, on note

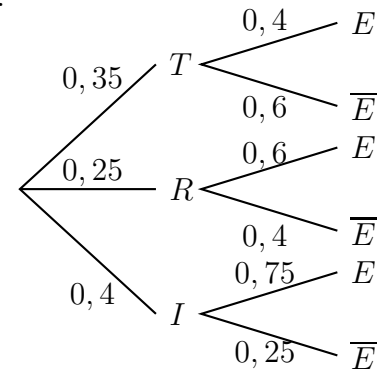
$T$  : "la personne a pour principale source d'information la télévision",

$R$  : "la personne a pour principale source d'information la radio"

$I$  : "la personne a pour principale source d'information internet"

$E$  : "la personne lit la presse écrite"

L'enquête a donné les résultats présentés sur l'arbre pondéré ci-contre.



Pour chacune des phrases suivantes, une seule des propositions est exacte. Indiquer laquelle.

1. La probabilité qu'une personne ait pour principale source d'information internet est égale à :  
a) 0,7                      b) 0,75                      c) 0,4

2. La probabilité qu'une personne lise la presse écrite sachant qu'elle a pour principale source d'information la radio est égale à :  
a) 0,25                      b) 0,6                      c) 0,15

3. La probabilité qu'une personne ait pour principale source d'information la télévision et qu'elle lise la presse écrite est égale à :  
a) 0,35                      b) 0,4                      c) 0,14

4. La probabilité qu'une personne ne lise pas la presse écrite et qu'elle ait pour principale source d'information internet est égale à :  
a) 0,25                      b) 0,4                      c) 0,1

5. La probabilité qu'une personne lise la presse écrite est égale à :  
a) 0,14                      b) 0,59                      c) 0,6675

### Exercice 16 - Type Bac

Une entreprise de textile emploie 300 personnes dans le secteur confection. Il est composé de trois ateliers. L'atelier de stylisme est constitué de 50 personnes. L'atelier de découpe est constitué de 100 personnes. Le reste du personnel travaille dans l'atelier de couture. Après une étude sur l'absentéisme, le directeur des ressources humaines a constaté que sur une année :

- 30% des stylistes ont eu au moins une absence ;
- 15% du personnel de découpe ont eu au moins une absence ;
- 90% du personnel de l'atelier de couture n'ont pas eu d'absence.

On choisit une personne au hasard dans cette entreprise et l'on admet que chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On note :

- $S$  l'évènement : « la personne choisie travaille à l'atelier de stylisme » ;
- $D$  l'évènement : « la personne choisie travaille à l'atelier de découpe » ;
- $C$  l'évènement : « la personne choisie travaille à l'atelier de couture » ;
- $A$  l'évènement : « la personne choisie a eu au moins une absence ».

Si  $M$  et  $N$  sont deux évènements, on note  $\bar{M}$  l'évènement contraire de l'évènement  $M$  et  $p_N(M)$  la probabilité de l'évènement  $M$  sachant  $N$ .

1. Déduire des informations de l'énoncé :
  - a) Les probabilités  $p(S)$ ,  $p(D)$  et  $p(C)$  des évènements  $S$ ,  $D$  et  $C$ .
  - b) Les probabilités  $p_S(A)$ ,  $p_D(A)$  et  $p_C(\bar{A})$ .
2. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
3. Calculer la probabilité de l'évènement  $S \cap A$ , notée  $p(S \cap A)$ .
4. Démontrer que  $p(A) = 0,15$ .
5. On sait que la personne choisie a eu au moins une absence cette année. Quelle est la probabilité que cette personne soit un styliste ?