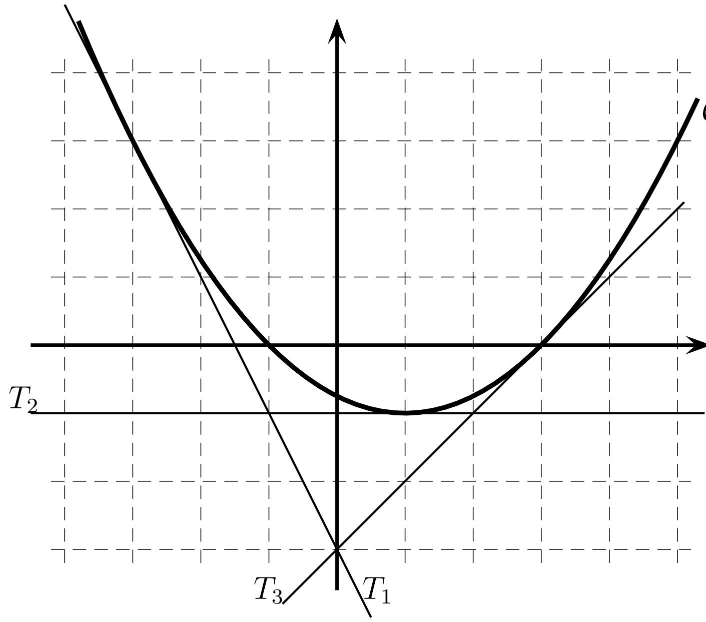
Dérivées & primitives - Exercices

TSTI2D

Exercice 1 $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f.
T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -3, 1 et 3.

Déterminer $f'(-3)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.



Exercice 2 Soit f la fonction définie par l'expression $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
2. Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse $a = 1$ et $a = 0$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer dans un repère les deux tangentes précédentes et l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 3 Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = \dfrac{5}{2}x$ d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = x^7$ f) $f(x) = 2x^3$ g) $f(x) = 3x + 2$ h) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

i) $f(x) = -x^2 + x - \dfrac{7}{2}$ j) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ k) $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 1}{x+1}$ l) $f(x) = \dfrac{4}{x}$

Exercice 4 Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par l'expression $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Exercice 5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$.
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

Exercice 6 Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes (préciser les limites) :

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$ c) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ d) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{(x+1)^2}$

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10$.

Rechercher les éventuels extrema locaux et globaux de f.

Exercice 8 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 4]$.
On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction f' :

x	-4	-1	1	2	4
f'	-7	0	-1	0	3

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 9 La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v, pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h, par l'expression

$$C(v) = 0,06v + \frac{150}{v}\ .$$

A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

Exercice 10 La puissance mécanique d'un moteur est donnée, en fonction de l'intensité I du courant d'alimentation, par la relation $P = -2I^2 + 150I - 148$.
Déterminer la valeur de l'intensité I pour laquelle la puissance est maximale. Préciser alors cette puissance.

Exercice 11 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3;2]$.
Déterminer un encadrement plus précis de cette solution.

Exercice 12 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions, respectivement dans les intervalles $]-2;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;2[$.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la plus grande de ces solutions.

Exercice 13 Calculer la dérivée f de la fonction f dans chacun des cas :

a)$f(x) = (2x-6)^2$ b)$f(x) = (-3x+2)^5$ c)$f(x) = \left(x^2 - x\right)^3$ d)$f(x) = (2x-3)^{-2}$ f)$f(x) = \left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^3$

Exercice 14 Calculer la dérivée f de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x) = \cos\left(-3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ c) $f(x) = \sin(2x)$ b) $f(x) = \sin^2\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ d) $f(x) = \cos\left(3x^2 + 2x\right)$

Exercice 15 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x - 4$ b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 12$ c) $f(x) = 6x^2 + 1$ d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

e) $f(x) = x^7$ f) $f(x) = 2x^3 - \dfrac{1}{2}x$ g) $f(x) = 2x - 4 - \dfrac{1}{x^2}$ h) $f(x) = 4x^2 + \dfrac{4}{x^2}$

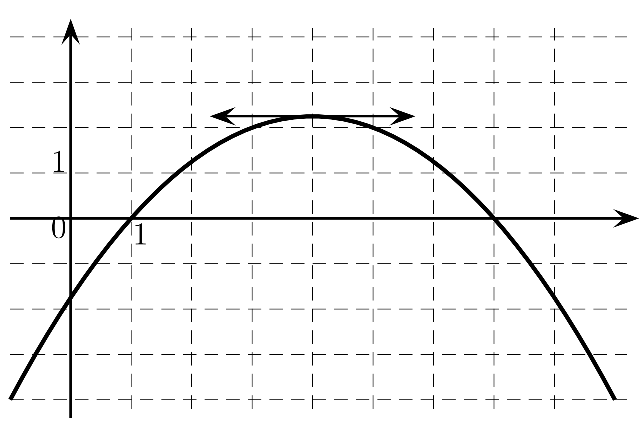
i) $f(t) = \sin(t)$ j) $f(t) = \sin(3t)$ k) $f(x) = 2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{12}\right)$ l) $f(x) = -4\cos(-3x)$

k) $f(x) = (2x-1)^3$ l) $f(x) = (2x+1)\left(x^2 + x\right)^4$ m) $f(x) = x\left(x^2 + 1\right)^3$ n) $f(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2 + 3\right)^2}$

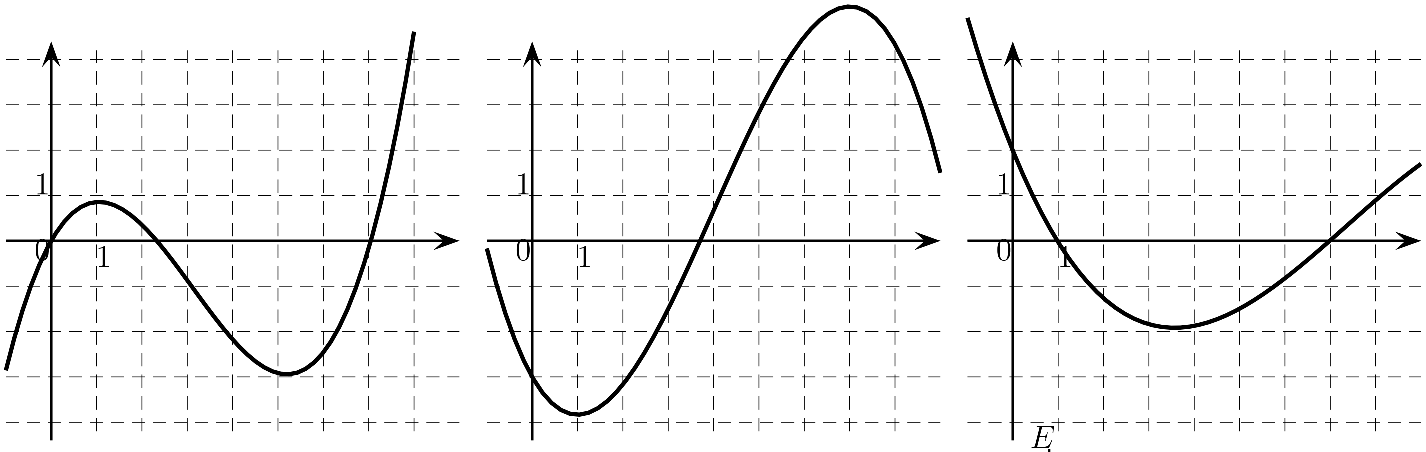
Exercice 16 Déterminer la primitive F de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 3$ telle que $F(1) = 2$.

Exercice 17 Déterminer la primitive F de la fonction f définie par $f(t) = 4\sin\left(2t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ telle que $F(0) = 3$.

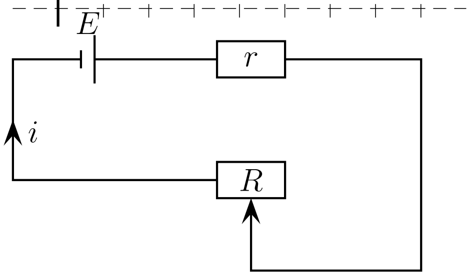
Exercice 18 Ci-contre est donnée la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. a) Lire sur le graphique les valeurs entières de $f(1)$, $f(3)$, $f'(4)$.
   b) Déterminer le signe de $f'(2)$ et de $f(2)$.
2. Parmi les trois courbes ci-dessous, une seule est la courbe représentative d'une primitive de la fonction f. Laquelle ?



Exercice 19 On considère le circuit ci-contre dans lequel E et r sont des constantes et R une résitance variable.



La puissance dissipée dans la résistance R est $P = \dfrac{RE^2}{(R+r)^2}$.

Déterminer, en fonction de E et r, la valeur de R pour laquelle la puissance est maximale.

Exercice 20 **0ptimisation de la circulation routière**

Des études ont montré que, dans une file de voitures se déplaçant à la vitesse constante de Vkm/h, la distance minimale de sécurité est donnée par la formule $d = \dfrac{V(50+V)}{200}$.

Une file de voitures se déplace sur l'autoroute. On admet que chaque voiture mesure en moyenne 3 mètres de long et que deux voitures consécutives sont séparées exactement par la distance minimale de sécurité.

Afin d'évaluer le trafic routier, un appareil de mesure placé sur le bord de la chaussée permet de décompter le nombre de véhicules qui passent devant lui.

1. Les voitures de la file se déplacent à 110 km/h. Calculer le nombre de voitures qui passent en une heure devant l'appareil de mesure.
2. Montrer que pour unr vitesse V km/h le nombre de voitures passant devant l'appareil de mesure est $N = \dfrac{200\,000V}{V^2 + 50V + 600}$.
3. Pour quelle vitesse V, ce nombre N est-il maximal ?

Exercice 21 **Accélération & vitesse, départ arrêté**

Une voiture effectue la distance 0-1000 mètres, départ arrêté, en 60 secondes. Le mouvement du véhicule est supposé rectiligne et uniformément accéléré, c'est-à-dire que son accélération est constante durant les 60 secondes.

Déterminer l'accélération du véhicule et sa vitesse au bout des 1000 mètres.

(Rappel : l'accélération γ est la dérivée de la vitesse v ; la vitesse v est la dérivée de la position).