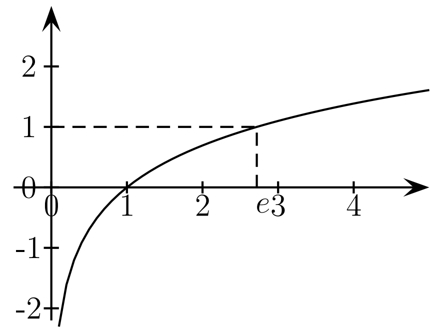
Fonctions exponentielles

I - Fonction exponentielle de base e

1) Définition

On rappelle le tableau de variation de la fonction logarithme népérien, et sa courbe représentative

x	0	$+\infty$
ln	$-\infty$ ↗	$+\infty$



On définit ainsi le nombre e comme l'unique solution de l'équation $\ln(x) = 1$.

Comme $\ln(x)$ varie de ∞ à $+\infty$ lorque $x \in]0; +\infty[$, il existe de même toujours une unique solution à équation $\ln(x) = a$ pour tout $a > 0$.

Définition *Pour tout nombre a, on note $\exp(a)$ le nombre réel qui est l'unique solution de l'équation $\ln(x) = a$.*

Corollaire

- $\exp(0) = 1$ *car* $\ln(1) = 0$
- $\exp(1) = e$ *car* $\ln(e) = 1$
- *Plus généralement :* $\exp(x) = y \iff x = \ln(y)$ *: les fonctions* exp *et* ln *sont des fonctions réciproques.*

On sait que, pour tout entier relatif n, $\ln(e^n) = n$, et donc que $\exp(n) = e^n$.

On généralise cette notation à tous les nombres réels : $\exp(x) = e^x$: la fonction exponentielle associe à un nombre réel x la puissance x du nombre e.

On parle pour cette raison de fonction exponentielle de base e.

2) Proriétés algébriques

Comme $\exp(x) = e^x$ est une puissance, on retrouve aussi les propriétés des puissances pour l'exponentielle : pour tout réel a et tous entiers n et n' on a $a^n a^{n'} = a^{n+n'}$, soit pour l'exponentielle :

Propriété *Pour tous réels a et b,* $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

<u>Démonstration:</u> Soit a et b deux réels, on a : $\ln(\exp(a + b)) = a + b$ d'une part, et d'autre part $a + b = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b))$.

Or $\ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = \ln(\exp(a) \times \exp(b)$, et donc, on a $a + b = \ln(\exp(a + b)) = \ln(\exp(a) \times \exp(b))$, d'où le résultat. □

Propriété

- $\exp(x) = e^x$
- $\ln\left(e^a\right) = a$ • $e^{\ln(b)} = b$
- *Pour tous réels x et $y > 0$, $y = e^x \iff \ln(y) = x$*   • *Pour tout réel x, $e^x > 0$*
- $e^{a+b}e^a\,e^b$ • $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ • $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

Exercice 1 Simplifier les expressions :

a) $e^{\ln(2)}$ b) $e^{-\ln(3)}$ c) $e^{2\ln(5)}$ d) $e^{\frac{1}{2}\ln(16)}$ e) $\ln\left(e^3\right)$ f) $\ln\left(e^{-4}\right)$ g) $\ln\left(\sqrt{e}\right)$ h) $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$

i) e^3e^5 j) $e^{-5}e^3e^2$ k) $\left(e^{-3}\right)^2$ l) $\dfrac{1}{e^7}$ m) $\dfrac{1}{e^{-x+2}}$ n) $e^{-x+3}e^{2x+2}$ p) $\dfrac{e^{3x+2}}{e^{2x+3}}$ q) $\left(e^{-2x+3}\right)^2$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^x = 3$ b) $e^x + 1 = 0$ c) $e^{x+3} = 1$ d) $\ln(x) = 6$ e) $\ln(x) = -2$ f) $\ln(x+2) = 5$

3) Étude de la fonction exponentielle

Les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont réciproques l'une de l'autre : pour tout réel x, $\ln\left(\exp(x)\right) = x$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\exp(x)\right)$, donc $f(x) = x$.

f est une fonction composée, et donc, $f'(x) = \exp'(x)\ln'\left(\exp(x)\right) = \exp'(x)\dfrac{1}{\exp(x)}$.

D'autre part, comme $f(x) = x$, on a aussi $f'(x) = 1$.

En résumé, on a donc $f'(x) = \dfrac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$, ce qui montre que $\exp'(x) = \exp(x)$.

Propriété *La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée : pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.*

Corollaire

- *Pour toute fonction u dérivable, on a $\left(e^u\right)' = u'\exp(u)$.*
- *Comme pour tout réel x, $e^x > 0$, on en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

  En particulier, pour tous réels a et b :
  - $e^a = e^b \iff a = b$
  - $e^a < e^b \iff a < b$
  - $e^a > e^b \iff a > b$

Exercice 3 Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3e^x + x$ b) $f(x) = xe^x$ c) $f(x) = \dfrac{1}{e^x+3}$ d) $f(x) = \dfrac{2e^x-1}{e^x+2}$ e) $f(x) = \left(3x^2+x\right)e^x$

f) $f(x) = \left(e^x+x^2\right)^2$ g) $f(x) = e^x\cos(2x)$ h) $f(x) = \dfrac{3}{2e^x-1}$ i) $f(x) = e^{3x+2}$ j) $f(x) = 5e^{-x+3}$

k) $f(x) = xe^{3x}$ l) $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x-1}}$ m) $f(x) = e^{x^2+1}$ n) $f(x) = \cos(2x)e^{3x}$ p) $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{2e^{-x}-1}$

Exercice 4 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2e^x$ b) $f(x) = x + 1 + e^x$ c) $f(x) = e^{2x}$ d) $f(x) = e^{-x}$

e) $f(x) = -5e^{3x+2}$ f) $f(x) = 3e^{0,02x}$ g) $f(x) = -2e^{-2x} + e^{-x}$ h) $f(x) = xe^{2x^2}$

Exercice 5 Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $F : x \mapsto (ax+b)e^x$ soit une primitive de la fonction $f : x \mapsto (2x+1)e^x$.

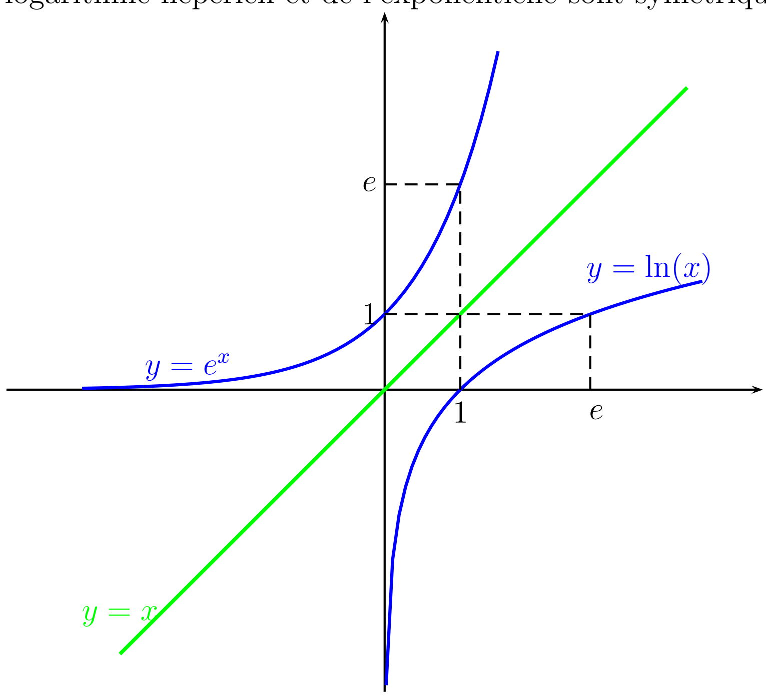
Exercice 6 Résoudre : a) $e^2 2x + 1 = 3$ b) $e^{-3x+2} = 0$ c) $e^{2x+1} = e^{-x-1}$ d) $\dfrac{e^{3x-2}}{e^{2x+5}} = 1$
e) $e^{x^2+5x-5} = e$ f) $e^{6x-1} = 5$ g) $e^{3x} - 2 > 1$ h) $\dfrac{e^{5x+2}}{e^{-3x+6}} > 0$ i) $\dfrac{e^{5x+2}}{e^{-3x+6}} > 6$

Exercice 7 Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x} - 6x + 5$.

4) Courbe représentative et limites

Soit $M(x; y)$ un point de la courbe représentative de la fonction exponentielle, donc tel que $y = e^x$. On a alors que $\ln(y) = x$, et donc le point $M'(y; x)$ est un point de la courbe représentative du logarithme népérien.

Comme les points $M(x;)$ et $M'(x'; y')$ par la symétrie d'axe la droite $y = x$, les courbes représentatives du logarithme népérien et de l'exponentielle sont symétriques l'une de l'autre par rapport à cette droite.



On déduit ainsi des limites de la fonction logarithme népérien celles de l'exponentielle :

Propriété $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
La droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$exp'(x) = \exp(x)$	$+$
exp	$0 \nearrow +\infty$

Le graphique précédent permet de plus de comparer le comportement en $+\infty$ des fonctions $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$.

On revoit que $\ln(x)$ est négligeable devant x lorsque x tend vers 0 et $+\infty$: $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

De même, e^x est prépondérant devant x en $-\infty$ et $+\infty$.

Propriété *$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.*

Plus généralement, pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes, et interpréter graphiquement le résultat, en terme d'asymptote, lorsque cela est possible :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}+e^x+3x$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}+e^x+5x^3$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 10-e^{-0,1x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2}+e^x$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-x$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{15}{1-e^{1-x}}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^x+3}{e^{-3x}}$

Exercice 9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = \left(-x^2-2x+2\right)e^{-x}+3$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f et montrer que $f'(x) = \left(x^2-4\right)e^{-x}$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(x^2+4x+2\right)e^{-x}+3x$.
   Vérifier que F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x}{2} - 1$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   b) Vérifier que, pour tout réel x non nul, $f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.
   b) Résoudre dan $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - \dfrac{1}{2} \geqslant 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$.
   c) Calculer la valeur exacte de $f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)$.
   d) Dresser le tableau de variation complet de f.

II - Fonction exponentielle de base a

1) Définition

Soit un nombre réel $a > 0$.

Pour tout entier relatif n, on a vu que $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$, donc $\exp\left(\ln\left(a^n\right)\right) = a^n = \exp\left(n\ln(a)\right)$.

Or, l'expression $\exp\left(n\ln(a)\right)$ existe pour tout nombre réel n, pas seulement entier relatif.

On peut ainsi étendre la définition, et la notation, des puissances :

Définition *Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, $a^b = e^{b\ln(a)}$.*

Exemple : • $3^{2,6} = e^{2,6\ln(3)} \simeq$ • $2^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln(2)} \simeq$

• $\sqrt{2}^{\pi} = e^{\pi\ln\left(\sqrt{2}\right)} = e^{\frac{\pi}{2}\ln 2} \simeq$ ou aussi, $\sqrt{2}^{\pi} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\pi} = 2^{\frac{1}{2}\times\pi} \simeq$

Définition *Pour $a > 0$, on appelle fonction exponentielle de base a, la fonction $x \mapsto a^x = e^{x\ln(a)}$.*

Remarques : • La fonction exponentielle, réciproque du logarithme népérien, est la fonction exponentielle de base e : $e^x = e^{x\ln(e)}$.

• La fonction exponentielle de base 10 est la fonction réciproque du logarithme décimal, ou logarithme de base 10 : $10^x = e^{x\ln(10)}$.

2) Sens de variation

Exercice 11 Soit $a > 0$, et f la fonction exponentielle de base a, donc définie par $f(x) = a^x$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
2. En déduire le signe de $f'(x)$, puis le sens de variation de f, selon la valeur de a.